CLASA A XI-A

Problema 1. Găsiţi toate funcţiile continue f şi g pentru care oricum am alege două şiruri $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ cu proprietatea că $(a_n+b_n)_{n\geq 1}$ este convergent, atunci şirul $(f(a_n)+g(b_n))_{n\geq 1}$ este convergent.

***

Barem de corectare. Fie x, y şi ℓ trei numere reale. Definim şirurile:

$$a_n = \begin{cases} x, & \text{pentru } n \text{ par} \\ y, & \text{pentru } n \text{ impar} \end{cases}$$

şi $b_n = \ell - a_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Cum $a_n + b_n$ este şir constant, deci convergent, deducem că $f(a_n)+g(b_n)$ este convergent, deci constant. Cu alte cuvinte, $f(x)+g(\ell-x) = f(y)+g(\ell-y)$, pentru orice x, y, ℓ numere reale.

Pentru $\ell = y$ obţinem că

$$f(y) - f(x) = g(y-x) - g(0) \tag{1}$$

Punem $x = 0$ în (1) şi obţinem că $g(y) = f(y) + c$, pentru o constantă c.

Înlocuind în (1), obţinem că $f(y) - f(x) = f(y-x) - f(0)$. Definim funcţia $h(x) = f(x) - f(0), \forall x \in \mathbb{R}$ şi deducem că $h(x+y) = h(x) + h(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Cum h satisface ecuaţia funcţională a lui Cauchy, obţinem că h este funcţie liniară, iar de aici se deduce că $f(x) = \alpha x + \beta$ şi $g(x) = \alpha x + \gamma$, pentru nişte constante reale α, β, γ.

Reciproc, dacă f şi g au forma de mai sus, atunci ele verifică condiţia din enunţ.

$\square$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 1, Craiova, 23 martie 2024

Problema 2. Găsiţi toate funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotone şi derivabile de două ori astfel încât

$$f'' + 4f + 3f^2 + 8f^3 = 0.$$

***

Barem de corectare. Înmulţim ecuaţia cu $2f'$ şi notând cu $g = (f')^2 + 4f^2 + 2f^3 + 4f^4$ obţinem că $g' = 0$, deci g este constantă. Atunci $f^2(1+\frac{1}{2}f+f^2)$ este mărginită, deci f este mărginită pentru că $\frac{3}{2}|f|^3 \leq f^2(1+\frac{1}{2}f+f^2)$.

Cum f este monotonă şi mărginită, $\lim_{x\to\infty} f(x)$ există şi este finită. Trecând la limită în ecuatia din enunţ, obţinem că $\lim_{x-\to\infty} f''(x)$ există si este finită. Analog, trecând la limită în $g = (f')^2 + 4f^2 + 2f^3 + 4f^4$ şi ţinând cont de faptul că g este constantă, obţinem că $\lim_{x\to\infty} f'(x)$ există şi este finită (aici am ţinut cont de faptul că f este monotonă, deci f' are semn constant).

Aplicăm teorema lui Lagrange pe intervalul $[n, n+1]$ şi obţinem că există un şir x_n astfel încât $x_n \in (n, n+1)$ şi $f'(x_n) = f(n+1) - f(n)$, deci $\lim_{n\to\infty} f'(x_n) = 0$. Deducem că $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$. Acelaşi raţionament ne dă că $\lim_{x\to\infty} f''(x) = 0$.

Trecând la limită în ecuaţia din enunţ, obţinem că $4\ell + 3\ell^2 + 8\ell^3 = 0$, unde $\ell = \lim_{x\to\infty} f(x)$. Deducem că $\ell = 0$. Trecând la limită în ecuaţia $g = (f')^2 + 4f^2 + 2f^3 + 4f^4$, obţinem că $g = 0$. Din $g \geq (f')^2$ rezultă că $f' = 0$, deci f este constantă, adică $f = 0$.

$\square$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 1, Craiova, 23 martie 2024

Problema 3. Fie A şi B două matrici $n \times n$ cu elemente numere întregi, iar p un număr prim. Să se arate că:

$$\mathrm{Tr}(A+B)^p \equiv \mathrm{Tr}(A^p + B^p) \pmod p,$$

unde $\mathrm{Tr}X$ este urma matricei X.

***

Barem de corectare. Fie $\mathcal{F}$ mulţimea tuturor funcţiilor

$$f : \{0, 1, ..., p-1\} \to \{A, B\}.$$

Avem că:

$$(A+B)^p = \sum_{f \in \mathcal{F}} f(0) \cdot f(1) \cdot ... \cdot f(p-1),$$

deci

$$\mathrm{Tr}(A+B)^p = \sum_{f \in \mathcal{F}} \mathrm{Tr}(f(0) \cdot f(1) \cdot ... \cdot f(p-1)).$$

Notăm cu σ permutarea ciclică $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & p-2 & p-1 \\ 1 & 2 & \cdots & p-1 & 0 \end{pmatrix}$ şi folosind egalitatea cunoscută $\mathrm{Tr}(XY) = \mathrm{Tr}(YX)$, obţinem că

$$\mathrm{Tr}(f(0) \cdot f(1) \cdot ... \cdot f(p-1)) = \mathrm{Tr}((f \circ \sigma)(0) \cdot (f \circ \sigma)(1) \cdot ... \cdot (f \circ \sigma)(p-1)).$$

Iterând, obţinem şi egalitatea:

$$\mathrm{Tr}(f(0) \cdot f(1) \cdot ... \cdot f(p-1)) = \mathrm{Tr}((f \circ \sigma^k)(0) \cdot (f \circ \sigma^k)(1) \cdot ... \cdot (f \circ \sigma^k)(p-1)),$$

pentru toţi $k \in \mathbb{N}$.

Să observăm că dacă $f = f \circ \sigma^k$ pentru un $k \in \{1, 2, ..., p-1\}$, atunci f este constantă. Într-adevăr, egalitatea precedentă este echivalentă cu

$$f(i) = f(i + k \pmod p)), \forall i \in \{0, 1, ..., p-1\},$$

(unde $i + k \pmod p$ este restul împărţirii la p). Iterând, obţinem şi că:

$$f(i) = f(i + kl \pmod p)), \forall i \in \{0, 1, ..., p-1\}, \forall l \in \mathbb{N}.$$

Alegând l astfel încât $kl \equiv 1 \pmod{p}$ (acesta există pentru că p este prim), obţinem că

$$f(i) = f(i + 1 \pmod{p}), \forall i \in \{0, 1, ..., p - 1\},$$

adică f este constantă.

Avem două funcţii constante în $\mathcal{F}$, iar celelalte apar în grupări de câte p elemente de forma:

$$\{f, f \circ \sigma, ..., f \circ \sigma^{p-1}\}.$$

Luând un reprezentant în fiecare grupare şi notând cu $\mathcal{R}$ această mulţime, avem că:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(A+B)^p &= \mathrm{Tr}(A^p + B^p) + \sum_{f\in\mathcal{R}} \sum_{k=0}^{p-1} \mathrm{Tr}((f\circ\sigma^k)(0)\cdot(f\circ\sigma^k)(1)\cdot ...\cdot(f\circ\sigma^k)(p-1)) \\
&= \mathrm{Tr}(A^p + B^p) + \sum_{f\in\mathcal{R}} p\mathrm{Tr}(f(0)\cdot f(1)\cdot ...\cdot f(p-1)) \\
&\equiv \mathrm{Tr}(A^p + B^p) \pmod{p}.
\end{aligned}$$

Observaţie: În general $\mathrm{Tr}(ABC) \neq \mathrm{Tr}(BAC)$. De exemplu, pentru:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

obţinem că $ABC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, iar $BAC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

În particular, nu putem concluziona că

$$\mathrm{Tr}(f(0)\cdot f(1)\cdot ...\cdot f(p-1)) = \mathrm{Tr}(A^{p-k}B^k),$$

unde k este cardinalul mulţimii $\{i | 0 \leq i \leq p-1, f(i) = B\}$. Dacă acest lucru ar fi fost adevărat atunci demonstraţia ar fi curs astfel:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(A+B)^p &= \sum_{f\in\mathcal{F}} \mathrm{Tr}(f(0)\cdot f(1)\cdot ...\cdot f(p-1)) \\
&= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \mathrm{Tr}(A^{p-k}B^k) \\
&\equiv \mathrm{Tr}(A^p) + \mathrm{Tr}(B^p) \pmod{p}.
\end{aligned}$$

□

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 1, Craiova, 23 martie 2024

Problema 4. Fie $n \geqslant 2$. Determinaţi matricele $A \in M_n(\mathbb{C})$ cu proprietatea că

$$\operatorname{rang}(A^2) + \operatorname{rang}(B^2) \geqslant 2 \cdot \operatorname{rang}(AB),$$

pentru orice $B \in M_n(\mathbb{C})$.

Cristi Săvescu
Cluj-Napoca

Barem de corectare. Observăm că matricea $A = 0_n$ respectă inegalitatea dată, pentru orice $B \in M_n(\mathbb{C})$. De asemenea, toate matricile inversabile A verifică inegalitatea dată, întrucât pentru orice $B \in M_n(\mathbb{C})$, aplicând succesiv inegalitatea produsului şi cea a lui Sylvester, avem

$$\operatorname{rang}(A^2) + \operatorname{rang}(B^2) = n + \operatorname{rang}(B^2) \geqslant 2 \cdot \operatorname{rang}(B) \geqslant 2 \cdot \operatorname{rang}(AB).$$

Mai departe, considerăm $A \neq 0_n$ o matrice neinversabilă cu proprietatea dată şi fie $r = \operatorname{rang}(A) \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

Amintim că $\operatorname{rang}(PQ) = \operatorname{rang}(Q)$ pentru orice matrice $P, Q \in M_n(\mathbb{C})$, cu P inversabilă (1).

De asemenea, $\operatorname{rang}(PQ) = \operatorname{rang}(P)$ pentru orice matrice $P, Q \in M_n(\mathbb{C})$, cu Q inversabilă (2).

Întrucât $\operatorname{rang}(A) = r$, există matricele inversabile $P, Q \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A = PI_rQ$, unde I_r este matricea cu primele r elemente de pe diagonala principală egale cu 1 şi restul elementelor nule.

Fie $K \in M_n(\mathbb{C})$ o matrice inversabilă oarecare şi $B = Q^{-1}I_rK$. Atunci $AB = PI_rK$, deci din (1) şi (2) deducem că

$$\operatorname{rang}(AB) = \operatorname{rang}(PI_rK) = \operatorname{rang}(PI_r) = \operatorname{rang}(I_r) = r.$$

Atunci, revenind la inegalitatea din ipoteză, avem

$$r + \operatorname{rang}(B^2) \geqslant \operatorname{rang}(A^2) + \operatorname{rang}(B^2) \geqslant 2 \cdot \operatorname{rang}(AB) = 2r,$$

deci $\operatorname{rang}(B^2) \geqslant r$. Dar $\operatorname{rang}(B^2) \leqslant \operatorname{rang}(B) = \operatorname{rang}(Q^{-1}I_rK) = r$, deci $\operatorname{rang}(B^2) = r$.

Cum matricea K a fost aleasă aleator, deducem că

$$\operatorname{rang}(I_rKQ^{-1}I_r) = \operatorname{rang}(Q^{-1}I_rKQ^{-1}I_rK) = \operatorname{rang}(B^2) = r,$$

pentru orice matrice inversabilă $K \in M_n(\mathbb{C})$. Cum funcţia $X \to XQ^{-1}$ este o bijecţie de la mulţimea matricilor inversabile din $M_n(\mathbb{C})$ la ea însăşi, concluzionăm că $\operatorname{rang}(I_rXI_r) = r$, pentru orice matrice inversabilă X.

Matricea $I_r X I_r$ este blocul $r \times r$ din colţul din stânga sus al matricei X, deci relaţia obţinută arată că orice matrice inversabilă din $M_n(\mathbb{C})$ are blocul $r \times r$ din colţul din stânga sus inversabil. Acest lucru îl contrazice însă matricea inversabilă $X_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

Concluzionăm că singurele matrice care verifică ipoteza sunt matricea nulă şi matricele inversabile.

$\square$