CONCURSUL DE MATEMATICĂ ŢIŢEICA

Ediţia 1, Craiova, 23 martie 2024

CLASA A VIII-a

Problema 1. Fie $E(x,y) = \dfrac{(1+x)(1+y)(1+xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}$. Determinaţi:

a) cea mai mare valoare pe care o poate lua $E(x,y)$ când $x, y \in \mathbb{R}$;

Olimpiadă Ucraina

b) cea mai mică valoare pe care o poate lua $E(x,y)$ când $x, y \in \mathbb{R}$.

Dorel Mihet
Timişoara

Barem de corectare. a) Folosind inegalitatea lui Cauchy-Buniakowski, inegalitatea mediilor sau formarea de pătrate se demonstrează că

$$(1+xy)^2 \leq (1+x^2)(1+y^2) \qquad (1),$$

oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.
(De exemplu, folosind C-B-S, $(1+x)^2 = (1\cdot 1 + 1 \cdot x)^2 \leq (1+1)(1+x^2) = 2(1+x^2)$).
Similar putem demonstra inegalităţile:

$$(1+x)^2 \leq 2(1+x^2) \qquad (2)$$

şi

$$(1+y)^2 \leq 2(1+y^2) \qquad (3)$$

Înmulţind membru cu membru inegalităţile (1) – (3) se obţine inegalitatea $E(x,y)^2 \leq 4$, deci $E(x,y) \leq 2$.

Cum $E(1,1) = 2$, cea mai mare valoare pe care o poate lua $E(x,y)$ este 2.

b) Vom demonstra că $E(x,y) \geq -\frac{1}{4}$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.
Într-adevar, inegalitatea este echivalentă cu

$$[2(1+xy)]^2 + 4(1+xy)(x+y) + (x+y)^2 - 2xy + 1 + x^2y^2 \geq 0,$$

adică

$$[2(1+xy) + x + y]^2 + (1-xy)^2 \geq 0,$$

ultima inegalitate fiind evident adevărată.
Egalitatea se obţine dacă cele două pătrate sunt nule. Aceste condiţii conduc la $xy = 1$ şi $x + y = -4$, adică $x = -2 \pm \sqrt{3}$ şi $y = -2 \mp \sqrt{3}$. Se observa că pentru aceste valori $E(x,y) = -\frac{1}{4}$.

$\square$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 1, Craiova, 23 martie 2024

Problema 2. Fie $ABCD$ un tetraedru pentru care $BA \perp AC$, $DB \perp (BAC)$ şi $AC \neq BD$. Notăm cu O mijlocul segmentului AB şi K piciorul perpendicularei din O pe DC. Demonstraţi că

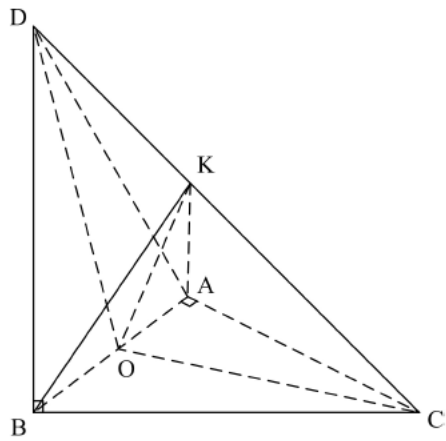
$$\frac{V_{KOAC}}{V_{KOBD}} = \frac{AC}{BD}$$

dacă şi numai dacă

$$2AC \cdot BD = AB^2.$$

Olimpiadă Vietnam

Barem de corectare. Deoarece DO şi CO sunt mediane în triunghiurile DBA, respectiv CBA, avem că $\frac{[OAC]}{[OBD]} = \frac{[ABC]}{[ADB]}$, unde am folosit paranteze drepte pentru a nota aria triunghiurilor respective.



Să observăm că

$$\frac{V_{KOAC}}{V_{KOBD}} = \frac{[OAC] \cdot d(K,(OAC))}{[OBD] \cdot d(K,(OAD))} = \frac{[ABC] \cdot d(K,(ABC))}{[ABD] \cdot d(K,(ADB))} = \frac{V_{KABC}}{V_{KABD}} = \frac{d(C,(KAB)}{d(D,(KAB))}.$$

Folosind asemănarea triunghiurilor, se arată că ultimul raport este egal cu $\frac{KC}{KD}$, deci

$$\frac{V_{KOAC}}{V_{KOBD}} = \frac{KC}{KD}.$$

Evident

$$KC + KD = CD \tag{1}$$

Folosind teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice OKC şi OKD aflăm $KC^2 - KD^2 = OC^2 - OD^2$, de unde

$$KC - KD = \frac{OC^2 - OD^2}{CD} \tag{2}$$

Acum folosind teorema lui Pitagora în triunghiurile OAC şi OBD, se observă

$$OC^2 - OD^2 = AC^2 - BD^2 \tag{3}$$

Din (1), (2) şi (3) deducem

$$\begin{cases} KC = \frac{1}{2}\left(CD - \frac{BD^2 - AC^2}{CD}\right) \\ KD = \frac{1}{2}\left(CD + \frac{BD^2 - AC^2}{CD}\right) \end{cases},$$

şi deci

$$\frac{V_{KOAC}}{V_{KOBD}} = \frac{KC}{KD} = \frac{CD^2 - BD^2 + AC^2}{CD^2 + BD^2 - AC^2} = \frac{2AC^2 + AB^2}{2BD^2 + AB^2}. \tag{4}$$

Pentru ultima egalitate am folosit teorema lui Pitagora în triunghiul BCD. Din (4), observăm că

$$\frac{V_{KOAC}}{V_{KOBD}} = \frac{AC}{BD}$$

dacă şi numai dacă

$$BD(2AC^2 + AB^2) = AC(2BD^2 + AB^2).$$

Ultima egalitate este echivalentă cu

$$(AC - BD) \cdot (2AC \cdot BD - AB^2) = 0$$

şi ţinând cont de $AC \neq BD$, rezultă concluzia.

$\square$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 1, Craiova, 23 martie 2024

Problema 3. Se ştie că există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât numărul $\overline{3\underbrace{a...a}_{k \text{ de } a}20943}$ este prim.

Aflaţi cifra a.

Dorel Mihet
Timişoara

Barem de corectare. Deoarece $n := \overline{3\underbrace{a...a}_{k \text{ de } a}20943}$ nu se divide cu 3, cifra a este diferită de 0, 3, 6, 9, deci poate fi doar 1, 2, 4, 5, 7, 8.
Fie $a_k := \overline{3\underbrace{a...a}_{k}20943}$, $k = 0, 1, ...$
Să observăm că $a_0 = 320943 = 3 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 29 \cdot 31$.
Diferenţa dintre a_{k+1} şi a_k este $\overline{3\underbrace{a...a}_{k+1}20943} - \overline{3\underbrace{a...a}_{k}20943} = (\overline{3a} - 3) \cdot 10^{k+5}$,

deci

$$a_{k+1} - a_0 = (a_{k+1} - a_k) + (a_k - a_{k-1}) + ... + (a_2 - a_1) + (a_1 - a_0) =$$
$$= (\overline{3a} - 3)(10^{k+5} + 10^{k+4} + ... + 10^5).$$

Rezultă că

$$a_{k+1} = (\overline{3a} - 3)(10^{k+5} + 10^{k+4} + ... + 10^5) + 329043 = (\overline{3a} - 3) \cdot A + 3 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 29 \cdot 31,$$

unde $A = 10^{k+5} + 10^{k+4} + ... + 10^5$.

Dacă $a = 1$, atunci $\overline{3a} - 3 = 28$ se divide cu 7, deci a_{k+1} se divide cu 7 oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$.
Dacă $a = 2$, atunci $\overline{3a} - 3 = 29$, deci a_{k+1} se divide cu 29 oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$.
Dacă $a = 4$ atunci $\overline{3a} - 3 = 31$, deci a_{k+1} se divide cu 31 oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$.
Dacă $a = 7$ atunci $\overline{3a} - 3 = 34$ se divide cu 17, deci a_{k+1} se divide cu 17 oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$.
Dacă $a = 8$ atunci $\overline{3a} - 3 = 35$ se divide cu 7, deci a_{k+1} se divide cu 7 oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$.
Aşadar pentru $a \neq 5$ numerele $\overline{3\underbrace{aa...a}_{k}20943}$ sunt compuse oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$.

Ştim din ipoteză că există cifre a pentru care a_k este prim, deci $a = 5$.

Observaţie. Numărul 3555555520943 (7 cifre de 5) este cel mai mic număr prim de această formă. □

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 1, Craiova, 23 martie 2024

Problema 4. Spunem că un număr natural n este „joli" dacă este medie aritmetică a două sau mai multor puteri (nu neapărat distincte) ale numărului 2 şi "superjoli" dacă este medie aritmetică a două sau mai multor puteri distincte ale numărului 2.

De exemplu numerele 7 şi 92 sunt superjoli, pentru că $7 = \dfrac{2^4+2^2+1}{3}$, $92 = \dfrac{2^8+2^4+2^2}{3}$.

a) Demonstraţi că orice număr natural nenul este joli.

b) Demonstraţi că nicio putere a lui 2 nu este superjoli.

c) Aflaţi cel mai mic număr natural nenul, diferit de o putere a lui 2, care nu este superjoli.

Olimpiadă Franţa

Barem de corectare. a) Numărul 1 este, în mod evident, joli.
Fie $n>1$ un număr natural oarecare. El se află între două puteri consecutive ale lui 2, adică există unic $k\in\mathbb{N}^*$ cu proprietatea că $2^k \le n \le 2^{k+1}-1$. Dacă $n = 2^k + s (0 \le s \le 2^k-1)$, atunci n se poate scrie ca o suma de 2^k puteri ale lui 2, după cum urmează:

$$n = \underbrace{2+2+\ldots+2}_{s \text{ termeni}} + \underbrace{1+1+\ldots+1}_{2^k-s \text{ termeni}}$$

şi atunci

$$n = \frac{1}{2^k}\left(\underbrace{2^{k+1}+2^{k+1}+\ldots+2^{k+1}}_{s \text{ termeni}} + \underbrace{2^k+2^k+\ldots+2^k}_{2^k-s \text{ termeni}}\right),$$

deci n este joli.

Soluţie alternativă a). Dacă $n = \dfrac{1}{k}\cdot(2^{\alpha_1}+\ldots+2^{\alpha_k})$, atunci

$$n+1 = \frac{1}{k}\cdot(2^{\alpha_1}+\ldots+2^{\alpha_k}+\underbrace{1+\ldots+1}_{k}) = \frac{1}{2k}(2^{\alpha_1+1}+\ldots+2^{\alpha_k+1}+\underbrace{2+\ldots+2}_{k}).$$

Deci dacă n este joli, atunci şi $n+1$ este joli. De aici rezultă că dacă $m>1$ ar fi un număr care nu este joli atunci nici $m-1$ nu ar joli, deci nici $m-2$, ..., nici 1 nu ar fi joli. Însă $1 = \dfrac{2^0+2^0}{2}$ este joli, absurd.
Aşadar nu există numere numerele naturale nenule care să nu fie joli.

b) Dacă pentru $n \geq 1$, putem scrie

$$2^n = \frac{2^{\alpha_1} + \ldots + 2^{\alpha_k}}{k},$$

unde $\alpha_1 \leq \ldots \leq \alpha_k$ sunt numere naturale distincte, atunci din paritate rezultă că $\alpha_1 \geq 1$ şi

$$2^{n-1} = \frac{2^{\alpha_1 - 1} + \ldots + 2^{\alpha_k - 1}}{k}.$$

Aşadar, dacă 2^n este superjoli atunci şi 2^{n-1} este superjoli, şi cum 1 nu e superjoli, nicio putere a lui 2 nu este superjoli.

c) Să observăm că $3 = (2+2^2)/2$, $5 = (2+2^3)/2$, $6 = (2^2+2^3)/2$, $7 = (1+2^2+2^4)/3$, $9 = (2+2^4)/2$, $10 = (2^2+2^4)/2$, $11 = (2^5+2^4+2^2+2+1)/5$ şi $12 = (2^4+2^3)/2$.

Vom arăta că 13 nu admite o astfel de scriere.
Să presupunem că există $k \in \mathbb{N}^*$ şi numerele $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{N}$, distincte, astfel încât

$$13 = \frac{1}{k}\left(2^{\alpha_1} + \ldots + 2^{\alpha_k}\right).$$

Atunci

$$13 \geq \frac{1 + 2 + \ldots + 2^{k-1}}{k} = \frac{2^k - 1}{k},$$

deci

$$13k + 1 \geq 2^k \tag{3}$$

Arătăm că pentru $k \geq 7$, nu poate avea loc inegalitatea (3).
Pentru aceasta notăm $a_k = \frac{13k+1}{2^k}$ şi observăm că $a_{k+1} < a_k$ pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ (această inegalitate este echivalentă cu $13k > 12 (k \in \mathbb{N}^*)$) şi cum $a_7 = \dfrac{92}{128} < 1$ toate numerele a_k cu $k > 7$ (fiind mai mici decât a_7) sunt subunitare, adică $13k + 1 < 2^k$ pentru orice $k \geq 7$.
(Inegalitatea $13k + 1 < 2^k$ pentru $k \geq 7$ se poate demonstra şi prin inducţie)
Pentru $k = 1, 2, ..., 6$ scriem numerele $13 \cdot k$ în baza 2 si observăm că nici unul nu are numarul de termeni egal cu valoarea lui k: $1 \cdot 13 = 2^0 + 2^2 + 2^3$, $2 \cdot 13 = 2^1 + 2^3 + 2^4$, $3 \cdot 13 = 2^5 + 2^2 + 2 + 1$, $4 \cdot 13 = 2^5 + 2^4 + 2^2$, $5 \cdot 13 = 2^6 + 2^9$, $6 \cdot 13 = 2^6 + 2^3 + 2^2 + 2$.
De aici rezultă concluzia.

$\square$