CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 2, Craiova, 22 martie 2025

CLASA A VII-a

Problema 1. Găsiţi toate tripletele de numere naturale (a, b, c), care satisfac simultan condiţiile

- $1 \leq a < b < c \leq 100$,
- b este media geometrică a lui a si c,
- $\{\sqrt{b}\}$ este media aritmetică a lui $\{\sqrt{a}\}$ şi $\{\sqrt{c}\}$.

(Prin $\{x\}$ se notează partea fracţionară a lui x.)

Soluţie. Din relaţia $\{\sqrt{a}\} + \{\sqrt{c}\} = 2\{\sqrt{b}\}$ rezultă

$$\sqrt{a} - [\sqrt{a}] + \sqrt{c} - [\sqrt{c}] = 2(\sqrt{b} - [\sqrt{b}]) \iff \sqrt{a} + \sqrt{c} = 2\sqrt{b} + [\sqrt{a}] + [\sqrt{c}] - 2[\sqrt{b}].$$

Dacă $k := [\sqrt{a}] + [\sqrt{c}] - 2[\sqrt{b}] \neq 0$, atunci, prin ridicarea la pătrat a ultimei egalităţi, deducem că $\sqrt{ac} = 2k\sqrt{b} + n$, unde $n \in \mathbb{Z}$. Cum $b^2 = ac$ şi $k \neq 0$, se obţine că b este un pătrat perfect. Pe de altă parte, dacă $k = 0$, atunci adunând egalităţile $[\sqrt{a}] + [\sqrt{c}] = 2[\sqrt{b}]$ şi $\{\sqrt{a}\} + \{\sqrt{c}\} = 2\{\sqrt{b}\}$, obţinem că $\sqrt{a} + \sqrt{c} = 2\sqrt{b}$. Prin ridicare la pătrat se deduce că $a + c = 2b$ şi, cum $b^2 = ac$, găsim că $a = b = c$, ceea ce este imposibil.

Din faptul că b este pătrat perfect, rezultă că $\{\sqrt{a}\} + \{\sqrt{c}\} = 0 \Longrightarrow \{\sqrt{a}\} = \{\sqrt{c}\} = 0$, deci a şi c sunt si ele pătrate perfecte.

Fie atunci $a = \alpha^2$, $b = \beta^2$, $c = \gamma^2$, unde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$. Prima condiţie este echivalentă cu $1 \leq \alpha < \beta < \gamma \leq 10$, iar a doua cu faptul că $\beta^2 = \alpha\gamma$. Din ultima egalitate se obţine imediat că $\alpha = d \cdot x^2$, $\gamma = d \cdot y^2$, unde d este cel mai mare divizor comun al numerelor α, γ, iar x, y sunt numere naturale.

Din $1 \leq dx^2 < dy^2 \leq 10$ deducem că $1 \leq x < y \leq 3$.

Obţinem următoarele posibilităţi pentru tripletul (d, x, y): $(1, 1, 2)$, $(1, 1, 3)$, $(1, 2, 3)$, $(2, 1, 2)$. Astfel, pentru (α, β, γ) avem soluţiile: $(1, 2, 4)$, $(1, 3, 9)$, $(4, 6, 9)$, $(2, 4, 8)$.

În concluzie tripletele care verifică cele trei condiţii sunt:
$(1, 4, 16)$, $(1, 9, 81)$, $(16, 36, 81)$, $(4, 16, 64)$. □

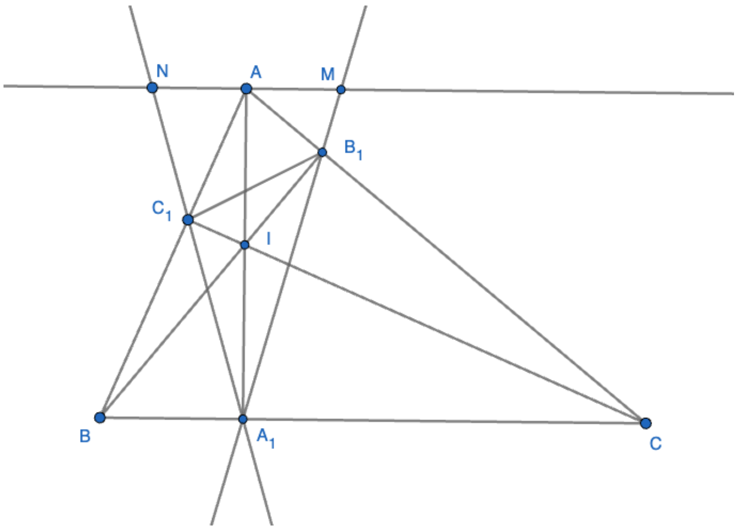
CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 2, Craiova, 22 martie 2025

Problema 2. În triunghiul ABC, se consideră dreptele concurente AA_1, BB_1, CC_1, unde punctele A_1, B_1, C_1 se află pe segmentele BC, AC, respectiv AB. Să se arate că dacă punctul comun al celor trei drepte AA_1, BB_1, CC_1 este centrul cercului înscris în $\Delta A_1B_1C_1$, atunci acesta este de asemenea ortocentrul ΔABC.

Soluţie. *Varianta 1.*

Este suficient să arătăm că dacă semidreapta A_1A este bisectoarea unghiului $\measuredangle B_1A_1C_1$, atunci AA_1 este înălţimea din A în ΔABC. Construim paralela d prin A la dreapta BC. Dreptele A_1B_1 şi A_1C_1 intersectează dreapta d în M, respectiv N.



Din asemănarea triunghiurilor $\Delta ANC_1 \sim \Delta BA_1C_1$, avem că

$$\frac{AN}{BA_1} = \frac{AC_1}{BC_1}.$$

Analog, din $\Delta AB_1M \sim \Delta CB_1A_1$, avem că

$$\frac{AM}{CA_1} = \frac{AB_1}{CB_1}.$$

Împărţim ultimele două egalităţi şi obţinem:

$$\frac{AN}{BA_1} \cdot \frac{CA_1}{AM} = \frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1},$$

deci

$$\frac{AN}{AM} = \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1}.$$

Cum partea dreaptă a ultimei egalităţi este egală cu 1 din teorema lui Ceva, obţinem că $AM = AN$, cu alte cuvinte A_1A este mediană în ΔA_1MN. Dacă AA_1 este bisectoarea unghiului $\measuredangle B_1A_1C_1$, atunci ΔA_1MN este isoscel şi A_1A este şi înălţime în acest triunghi. Astfel, AA_1 este înălţime în ΔABC.

Varianta 2.

Fie I_A, I_B, I_C centrele cercurilor exînscrise în $\Delta A_1B_1C_1$, corespunzătoare vârfurilor A_1, B_1, respectiv C_1. Din faptul că I_A se află pe semidreapta IA, distingem două posibilităţi: fie I_A aparţine segmentului IA, fie nu aparţine. Dacă I_A aparţine segmentului IA şi $I_A \neq A$, atunci, având în vedere că I_A, C_1, I_B sunt coliniare (cele trei puncte se află pe perpendiculara în C_1 pe dreapta CC_1), obţinem că I_B nu aparţine segmentului IB. Argumentând în mod similar, deducem că I_C aparţine segmentului IC, dar $I_C \neq C$, iar apoi că I_A nu aparţine segmentului IA, ceea ce contrazice presupunerea iniţială. Celălalt caz se tratează analog. Am obţinut astfel că $I_A = A$, $I_B = B$, $I_C = C$, adică $AB \perp CC_1$, etc.

$\square$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 2, Craiova, 22 martie 2025

Problema 3. Dintre toate triunghiurile nedegenerate cu laturi numere naturale și perimetrul 100, determinaţi triunghiul cu aria minimă.

Soluţie. *Varianta 1*

Fie $a \leq b \leq c$ laturile triunghiului cu aria minimă. Conform formulei lui Heron, aria triunghiului este dată de $S = \sqrt{50(50-a)(50-b)(50-c)}$.

Din inegalitatea triunghiului rezulta că, dacă un triunghi are laturi numere întregi şi una dintre ele este egală cu 1, atunci triunghiul trebuie sa fie isoscel. Însă, în cazul nostru, cum $a+b+c = 100$, nu putem avea $a = 1$ si $b = c$. Deducem astfel că $a \geq 2$. Vom demonstra prin reducere la absurd că $a = 2$.

Presupunem prin absurd că $a \geq 3$. Notăn $\alpha = a - 1$ şi $\beta = b + 1$ şi arătăm că (α, β, c) sunt laturile unui triunghi cu perimetru 100. Observăm că $\alpha < \beta$ şi $\alpha < c$. Dacă $\beta \leq c$ atunci trebuie verificată inegalitatea $\alpha + \beta > c$. Dar, cum $\alpha + \beta = a + b$ si $a + b > c$ (deoarece a, b, c sunt laturile unui triunghi), rezultă că inegalitatea este satisfăcută. Dacă $\beta > c$ trebuie verificată inegalitatea $\alpha+c > \beta$. Deoarece $b+1 = \beta > c$ şi $c \geq b$, rezultă că $b = c$. În acest caz, inegalitatea $\alpha+\beta > c$ devine echivalentă cu $a > 2$, ceea ce este adevărat, deoarece am presupus că $a \geq 3$. În concluzie, (α, β, c) sunt laturile unui triunghi cu perimetrul 100.

Deoarece a, b, c sunt laturile triunghiului de arie minimă, avem că

$$(50-a)(50-b)(50-c) \leq (50-\alpha)(50-\beta)(50-c),$$

care este echivalentă cu

$$(50-a)(50-b) \leq (51-a)(49-b) \Longrightarrow 1 + b \leq a.$$

Aceasta contrazice inegalitatea $a \leq b$.

Contradicţia obtinută arată că, într-adevăr, $a = 2$ şi $b + c = 98$. Din inegalitatea triunghiului se deduce imediat că $b = c = 49$.

Varianta 2.

Fie $a \leq b \leq c$ laturile unui triunghi de perimetru 100 cu $a, b, c \in \mathbb{N}$. Vom arăta că

$$(50-a)(50-b)(50-c) \geq 48 = (50-2)(50-49)(50-49),$$

iar egalitatea se realizează doar atunci când $a = 2$, $b = 49$, $c = 49$. Atunci, formula lui Heron va duce la concluzia că triunghiul cu aria minimă are laturile 2, 49 şi 49.

Din $50 - a \geq 50 - b \geq 50 - c > 0$ şi $(50-a) + (50-b) + (50-c) = 50$, deducem că $50 - a \geq 17$.

Dacă $(50-b)(50-c) \geq 3$, atunci $(50-a)(50-b)(50-c) \geq 51 > 48$.
Dacă $(50-b)(50-c) \leq 2$, atunci există două posibilităţi:

- $50-b=2$ şi $50-c=1$,
- $50-b=1$ şi $50-c=1$.

În primul caz $50-b=2$, $50-c=1$ şi $50-a=47$, deci $(50-a)(50-b)(50-c)=94>48$.
În al doilea caz $50-b=1$, $50-c=1$ şi $50-a=48$, astfel că $(50-a)(50-b)(50-c)=48$.

Am demonstrat, aşadar, că $(50-a)(50-b)(50-c) \geq 48 = (50-2)(50-49)(50-49)$, iar egalitatea se realizează doar atunci când $50-b=1$, $50-c=1$ şi $50-a=48$, adică atunci când $a=2$, $b=49$, $c=49$. $\square$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 2, Craiova, 22 martie 2025

Problema 4. Fie $4n$ puncte în plan, astfel încât oricare trei dintre ele nu sunt coliniare, unde $n \geq 1$. Să se arate că mulţimea centrelor de greutate ale triunghiurilor care se pot forma având vârfurile în aceste puncte conţine cel puţin $4n$ elemente.

Radu Bumbăcea

Soluţie. Considerăm mai întâi cazul $n = 1$. Fie punctele A, B, C, D în plan, astfel încât oricare trei dintre ele nu sunt coliniare. Cu aceste puncte se pot forma exact patru triunghiuri. Trebuie să arătăm că oricare două dintre aceste triunghiuri au centre de greutate distincte. Presupunem, prin reducere la absurd, că există două triunghiuri care au acelaşi centru de greutate G. Să observăm că cele două triunghiuri au o latură comună, de exemplu AB. Dacă notăm cu M mijlocul segmentului AB, atunci atât C, cât şi D se află pe dreapta MG. În plus, avem relaţia

$$\frac{MG}{GC} = \frac{MG}{GD} = \frac{1}{2} \Longrightarrow GC = GD.$$

Rezultă că $C = D$, ceea ce este o contradicţie.

Trecem acum la cazul general. Fie d o dreaptă în plan care nu este perpendiculară pe nicio dreaptă determinată de două dintre punctele date. O astfel de dreaptă există. Pentru a justifica acest lucru, considerăm un punct arbitrar în plan şi trasăm prin el toate dreptele care sunt perpendiculare pe cel puțin o dreaptă determinată de două dintre punctele date. Numărul acestor drepte este cel mult $2n(4n-1)$. Orice altă dreaptă care trece prin punctul considerat şi este diferită de aceste perpendiculare are proprietatea dorită.

Considerăm acum proiecţiile celor $4n$ puncte pe dreapta d. Datorită modului în care am ales dreapta d, oricare două dintre aceste puncte au proiecţii distincte. Notăm aceste proiecţii cu $P_1, P_2, ..., P_{4n}$, în această ordine, în sensul că fiecare punct P_i se află pe segmentul $P_{i-1}P_{i+1}$ pentru orice $2 \leq i \leq 4n-1$.

Alegem punctele Q_0, Q_1, ..., Q_n pe dreapta d, în această ordine, astfel încât în interiorul fiecărui segment Q_iQ_{i+1} să se afle exact patru dintre punctele $P_1, P_2, ..., P_{4n}$. Pe fiecare dintre punctele Q_i construim drepta ℓ_i, perpendiculară pe drepta d.

Observăm că în fiecare dintre benzile din plan, delimitate de dreptele ℓ_i şi ℓ_{i+1}, se găsesc exact patru dintre cele $4n$ puncte date. Aplicând demonstraţia de la cazul $n = 1$, fiecare astfel de grup de patru puncte determină patru centre de greutate distincte , iar acestea se află în banda din care fac parte cele patru puncte. Prin urmare, în fiecare bandă avem câte patru centre de greutate distincte, iar având n benzi, obţinem astfel cel puţin $4n$ centre de greutate distincte.

$\square$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 2, Craiova, 22 martie 2025

CLASA A VIII-a

Problema 1. Determinaţi numerele reale x ştiind că $\frac{n}{3n+1} < x < \frac{4n+1}{2n-1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Gheorghe Boroica

Soluţie. Fie $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{n}{3n+1} < x < \frac{4n+1}{2n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*\}$. Deoarece $\frac{n}{3n+1} < \frac{1}{3} < 2 < \frac{4n+1}{2n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, rezultă că $\left[\frac{1}{3}, 2\right] \subset A$.

Vom demonstra că are loc si incluziunea inversă.

Presupunem contrariul, anume că există $a > 0$, $a \in A \setminus \left[\frac{1}{3}, 2\right]$.

Atunci $a \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ sau $a \in (2, \infty)$.

În primul caz, din $\frac{n}{3n+1} < a, \forall n \in \mathbb{N}^*$ rezultă $n(1-3a) < a$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ şi cum $1 - 3a > 0$, deducem că

$$n < \frac{a}{1-3a}, \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

inegalitate care este falsă de exemplu pentru $n = \left[\frac{a}{1-3a}\right] + 1$, contradicţie.

Similar, în al doilea caz rezultă $a < \frac{4n+1}{2n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. De aici deducem inegalitatea $n(2a-4) < a+1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Cum $2a - 4 > 0$, avem că

$$n < \frac{a+1}{2a-4}, \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

inegalitate falsă pentru $n = \left[\frac{a+1}{2a-4}\right] + 1$, de unde rezultă contradicţia.

Aşadar, $A = \left[\frac{1}{3}, 2\right]$. □

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 2, Craiova, 22 martie 2025

Problema 2. Fie $k \geq 2$ un număr natural şi $x_1, x_2, \ldots, x_k \in (0, 1)$ numere reale. De asemnea, fie $m_1, m_2, \ldots, m_k$, $n_1, n_2, \ldots, n_k$ numere întregi. Definim

$$A = x_1^{m_1} \cdot x_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{m_k}, \; B = x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{n_k}$$

şi

$$\begin{aligned} C &= x_1^{\min(m_1,n_1)} \cdot x_2^{\min(m_2,n_2)} \cdot \ldots \cdot x_k^{\min(m_k,n_k)} \\ D &= x_1^{\max(m_1,n_1)} \cdot x_2^{\max(m_2,n_2)} \cdot \ldots \cdot x_k^{\max(m_k,n_k)}. \end{aligned}$$

Să se demonstreze că

$$A + B \leq C + D.$$

Când are loc egalitatea?

Dorel Mihet̡

Soluţie. Deoarece $x + y = \min(x, y) + \max(x, y)$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, are loc egalitatea $A \cdot B = C \cdot D$. Aşadar trebuie să demonstrăm că

$$A + B \leq C + \frac{AB}{C}$$

inegalitate echivalentă cu $C^2 - C(A + B) + AB \geq 0$, adică cu $(C - A)(C - B) \geq 0$.

Cum $x_i \in (0, 1)$ şi $\min(m_i, n_i) \leq m_i, n_i$, avem că $x_i^{\min(m_i,n_i)} \geq x_i^{m_i}$ şi $x_i^{\min(m_i,n_i)} \geq x_i^{n_i}$, oricare ar fi $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Prin înmulţire rezultă că $C \geq A$ şi $C \geq B$.

Egalitatea are loc când $C = A$ sau $C = B$. Egalitatea $C = A$ are loc dacă şi numai dacă $\min(m_i, n_i) = m_i$, adică $m_i \leq n_i$, oricare ar fi $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Similar, $C = B$ are loc dacă şi numai dacă $n_i \leq m_i$, oricare ar fi $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

$\square$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 2, Craiova, 22 martie 2025

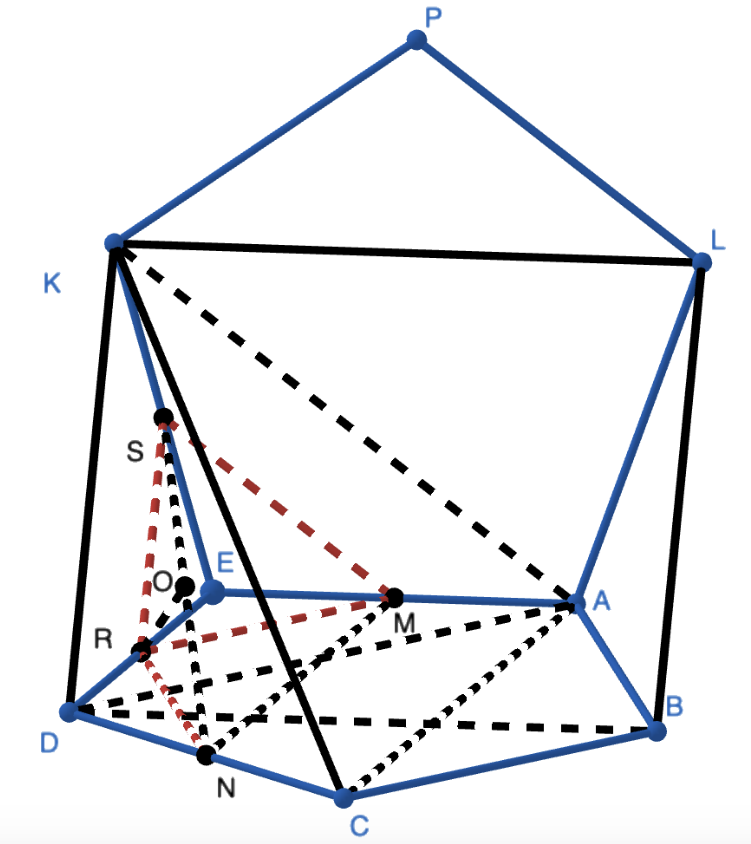
Problema 3. În spațiu sunt date două pentagoane regulate $ABCDE$ și $AEKPL$, astfel încât $\angle DAK = 60°$. Notăm cu M, N şi S mijloacele segmentelor AE, CD şi respectiv EK.

a) Să se arate că triunghiul NMS este dreptunghic.

b) Să se demonstreze că planele (ACK) și (BAL) sunt perpendiculare.

Olimpiadă Ucraina

Soluţie. a) Să observăm că $AK = AD$ şi $\angle DAK = 60°$, deci triunghiul ADK este echilateral.



Avem că $AD = DK$ şi $AE = EK$, de unde D şi E se află în planul mediator segmentului AK, aşadar $DE \perp AK$. Cum $MS \parallel AK$ şi $MN \parallel AC \parallel DE$ rezultă $\angle NMS = 90°$.

b) Să observăm că planele (ACK), (MNS) sunt paralele.

Avem $LK = BD$ şi $LK \parallel AE \parallel BD$, deci $BLKD$ este paralelogram şi $BL \parallel KD$.

Fie R mijlocul segmentului DE. Acum $RS \parallel KD \parallel BL$ şi $RN \parallel CE \parallel AB$, de unde rezultă că planele (ABL) şi (RNS) sunt paralele.

Deci este suficient să arătăm că (MNS) şi (RNS) sunt perpendiculare.

Fie O proieţia lui R pe planul (NMS). Cum $NR = \frac{CE}{2} = \frac{AD}{2}$, $MR = \frac{AD}{2}$ şi $RS = \frac{KD}{2} = \frac{AD}{2}$, rezultă că $OS = ON = OM$, deci O este centrul cercului circumscris triunghiului NMS. Cum triunghiul NMS este dreptunghic, O este mijlocul segmentului SN. Planul (RNS) conţine dreapta RO, perpendiculară pe planul (NMS), deci $(MNS) \perp (RNS)$.

$\square$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ŢIŢEICA

Ediţia 2, Craiova, 22 martie 2025

Problema 4. a) Să se arate că oricare ar fi numerele naturale nenule a, b, c există un număr natural nenul N astfel încât

$$\left(N+a^2\right)\left(N+b^2\right)\left(N+c^2\right)$$

este pătrat perfect.

b) Arătaţi că există cinci numere naturale nenule distincte a, b, c, d, e pentru care există un număr natural nenul N astfel încât

$$\left(N+a^2\right)\left(N+b^2\right)\left(N+c^2\right)\left(N+d^2\right)\left(N+e^2\right)$$

să fie pătrat perfect.

Luminiţa Popescu

Soluţie. a) Se verifică imediat că $N = ab+bc+ca$ satisface condiţia. Într-adevăr, pentru $N = ab+bc+ca$ avem

$$\left(N+a^2\right)\left(N+b^2\right)\left(N+c^2\right) = [(a+b)(b+c)(c+a)]^2.$$

b) Căutăm N astfel încât $N + d^2 = x^2$ şi $N + e^2 = y^2$, unde $x, y \in \mathbb{N}$. Cu alte cuvinte,

$$x^2 - d^2 = y^2 - e^2 \Longleftrightarrow x^2 + e^2 = y^2 + d^2.$$

De exemplu, $125 = 2^2 + 11^2 = 5^2 + 10^2$, ceea ce este echivalent cu

$$10^2 - 2^2 = 11^2 - 5^2 = 96.$$

Deci, $N = 96$, iar $d = 2, e = 5$. Căutăm acum a, b, c astfel încât $ab + bc + ca = 96$. Încercăm mai întâi $c = 1$ şi obţinem:

$$ab + a + b = 96 \Longrightarrow (a+1)(b+1) = 97$$

Din păcate, 97 este număr prim, deci unul dintre numerele a şi b este egal cu 0, ceea ce nu convine.

Cum $d = 2, c = 2$ nu convine, astfel că încercăm $c = 3$.

$$ab + 3a + 3b = 96 \Longrightarrow (a+3)(b+3) = 105$$

O soluţie ar fi $a = 4, b = 12$. Am găsit numerele a, b, c, d, e ca fiind $2, 3, 4, 5, 12$ şi $N = 96$. Se poate verifica uşor că:

$$\left(96+2^2\right)\left(96+3^2\right)\left(96+4^2\right)\left(96+5^2\right)\left(96+12^2\right) = 2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11^2$$

Alternativ, se poate căuta mai sus N astfel încât $N+d^2=t\cdot x^2$ şi $N+e^2=t\cdot y^2$, pentru numere naturale t,x,y. De aici deducem că:

$$t\left(x^2-y^2\right)=d^2-e^2 \Longleftrightarrow t(x-y)(x+y)=(d-e)(d+e)$$

Putem alege $t=d-e, x-y=1, x+y=d+e$ şi obţinem:

$$x=\frac{d+e+1}{2}, y=\frac{d+e-1}{2}, N=(d-e)\left(\frac{d+e+1}{2}\right)^2-d^2.$$

Pentru a uşura calculul alegem $d=e+3$, deci $x=e+2, y=e+1$ şi $N=2e^2+6e+3$. Acum căutăm ca mai sus a,b,c astfel încât

$$ab+bc+ca=2e^2+6e+3$$

Pentru $c=1$ obţinem $(a+1)(b+1)=2(e+1)(e+2)$. Putem alege $a=e+1$ şi $b=2e+1$.

Am găsit numerele a,b,c,d,e ca fiind $1,e,e+1,e+3,2e+1$ (unde $e>3$) şi $N=2e^2+6e+3$.

Verificăm că:

$$\begin{aligned}
N+1^2&=2e^2+6e+4=2(e+1)(e+2)\\
N+e^2&=3e^2+6e+3=3(e+1)^2\\
N+(e+1)^2&=3e^2+8e+4=(e+2)(3e+2)\\
N+(e+3)^2&=3e^2+12e+12=3(e+2)^2\\
N+(2e+1)^2&=6e^2+10e+4=2(e+1)(3e+2)
\end{aligned}$$

□

CLASA A IX-a

Problema 1. Fie $2n+1$ puncte distincte situate pe un cerc. Considerăm toate distanţele dintre oricare două dintre aceste puncte. Care este cardinalitatea minimă pe care o poate avea mulţimea tuturor acestor distanţe?

Radu Bumbăcea

Soluţie. Notăm cu P_1 un punct oarecare de pe cerc, iar apoi numerotăm consecutiv celelalte puncte ca $P_2, P_3, \ldots, P_{2n+1}$, în sensul acelor de ceasornic. Există $2n$ segmente având un capăt în P_1 şi celălalt în unul dintre celelalte puncte.

Dacă dintre aceste $2n$ segmente cel mult $n-1$ au lungimi distincte, atunci, aplicând Principiul Cutiei, rezultă că există trei indici $i, j, k \in \{2, 3, \ldots, 2n+1\}$ astfel încât:

$$P_1P_i = P_1P_j = P_1P_k.$$

Aceasta ar implica faptul că cercul pe care se află cele $2n+1$ de puncte şi cercul de centru P_1 cu raza P_1P_i se intersectează în trei puncte distincte, ceea ce este imposibil. Aşadar, dintre aceste $2n$ segmente, cel puţin n au lungimi distincte. Prin urmare, cardinalitatea minimă a mulţimii distanţelor este cel puţin n.

Pentru a arăta că această margine inferioară poate fi atinsă, considerăm punctele $P_1, P_2, \ldots, P_{2n+1}$ ca fiind vârfurile unui poligon regulat cu $2n+1$ laturi. Observăm că distanţa dintre două puncte P_i și P_j depinde, datorită simetriei, doar de restul împărţirii numărului $j-i$ la n. Cele n distanţe distincte sunt:

$$P_1P_2, P_1P_3, \ldots, P_1P_{n+1}.$$

Aşadar, cardinalitatea minimă a mulţimii tuturor distanţelor este n.

□

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 2, Craiova, 22 martie 2025

Problema 2. Fie a, b, c trei numere reale strict pozitive astfel încât $ab+bc+ca=4$. Determinaţi valoarea minimă a expresiei:

$$E(a,b,c)=\frac{a^2+b^2}{ab}+\frac{b^2+c^2}{bc}+\frac{c^2+a^2}{ca}-(a-b)^2.$$

Soluţie. Avem că

$$\begin{aligned} E(a,b,c) &= 6+\frac{a^2+b^2}{ab}-2+\frac{b^2+c^2}{bc}-2+\frac{c^2+a^2}{ca}-2-(a-b)^2 \\ &= 6+\frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(b-c)^2}{bc}+\frac{(c-a)^2}{ca}-(a-b)^2. \end{aligned}$$

Aplicând inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz, obţinem

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(b-c)^2}{bc}+\frac{(c-a)^2}{ca}\right)\geq(|a-b|+|b-c|+|c-a|)^2,$$

astfel încât

$$\frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(b-c)^2}{bc}+\frac{(c-a)^2}{ca}\geq\frac{1}{4}(|a-b|+|b-c|+|c-a|)^2. \tag{1}$$

Inegalitatea triunghiului ne dă:

$$|a-b|+|b-c|+|c-a|\geq|a-b|+|b-c+c-a|=2|a-b|. \tag{2}$$

Din (1) şi (2) se obţine:

$$\frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{(b-c)^2}{bc}+\frac{(c-a)^2}{ca}\geq(a-b)^2.$$

Prin urmare, avem

$$E(a,b,c)\geq 6,$$

cu egalitate pentru $a=b=c=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

$\square$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 2, Craiova, 22 martie 2025

Problema 3. Considerăm în plan vectorii nenuli $\overrightarrow{OA_1}, ..., \overrightarrow{OA_n}$, unde $n \geq 3$, astfel încât oricare doi dintre ei sunt necoliniari. Presupunem că inegalitatea

$$|\overrightarrow{OA_1} + ... + \overrightarrow{OA_n}| \geq |\pm \overrightarrow{OA_1} \pm ... \pm \overrightarrow{OA_n}|$$

are loc pentru orice alegere a semnelor $\pm$. Arătaţi că există o dreaptă care trece prin O, faţă de care punctele $A_1, ..., A_n$ se află de aceeaşi parte.

Cristi Săvescu

Soluţie. Fie $\vec{v} := \overrightarrow{OA_1} + ... + \overrightarrow{OA_n}$. Dacă $\vec{v} = \vec{0}$, atunci $\pm\overrightarrow{OA_1} \pm ... \pm \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$ pentru orice alegere a semnelor $\pm$. De aici se deduce imediat că $\overrightarrow{OA_1} = ... = \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$, ceea ce nu este posibil.

Fie acum d dreapta care trece prin O şi este perpendiculară pe vectorul $\vec{v}$. Arătăm că toţi vectorii $\overrightarrow{OA_1}, ..., \overrightarrow{OA_n}$ se află de aceeaşi parte a dreptei d ca şi $\vec{v}$.

Presupunem, prin reducere la absurd, că există un vector $\overrightarrow{OA_i}$ care se află de cealaltă parte a dreptei d. Fără a restrânge generalitatea, fie acest vector $\overrightarrow{OA_n}$. Avem că $-\overrightarrow{OA_n}$ se află de aceeaşi parte a dreptei d ca şi $\vec{v}$, astfel că unghiul dintre aceşti doi vectori are măsură strict mai mică decât $90°$. Aplicând faptul că, într-un triunghi, latura opusă unui unghi obtuz este mai mare decât oricare dintre celelalte laturi, deducem că

$$|\vec{v} - \overrightarrow{OA_n}| > |\vec{v}|. \tag{3}$$

Pe de altă parte,

$$|\overrightarrow{OA_1} + ... + \overrightarrow{OA_{n-1}} + \overrightarrow{OA_n}| \geq |\overrightarrow{OA_1} + ... + \overrightarrow{OA_{n-1}} - \overrightarrow{OA_n}|. \tag{4}$$

Adunând $|\vec{v}|$ în ambele părţi ale inegalităţii (4) şi aplicând inegalitatea triunghiului, obţinem:

$$\begin{aligned} 2|\overrightarrow{OA_1} + ... + \overrightarrow{OA_n}| &\geq |\overrightarrow{OA_1} + ... + \overrightarrow{OA_n}| + |\overrightarrow{OA_1} + ... + \overrightarrow{OA_{n-1}} - \overrightarrow{OA_n}| \\ &\geq 2|\overrightarrow{OA_1} + ... + \overrightarrow{OA_{n-1}}|. \end{aligned}$$

Cu alte cuvinte, $|\vec{v}| \geq |\vec{v} - \overrightarrow{OA_n}|$, ceea ce contrazice (3). Prin urmare, presupunerea de mai sus este falsă, ceea ce înseamnă că toţi vectorii $\overrightarrow{OA_1}, ..., \overrightarrow{OA_n}$ se află de acceaşi parte a dreptei d ca şi $\vec{v}$. $\square$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ŢIŢEICA

Ediţia 2, Craiova, 22 martie 2025

Problema 4. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, notăm cu $s(n)$ suma cifrelor lui n. Să se determine numerele naturale $k \geq 2$ pentru care există $a, b \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$s(n^3 + an + b) \equiv s(n) \pmod{k},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^\star$.

Soluţie. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, există un număr natural ℓ (care depinde de n) astfel încât $10^{2\ell} > an$ şi $10^\ell > b$. Pentru un astfel de număr ℓ avem că:

$$s(n^3 + an + b) \equiv s(n) = s(10^\ell n) \equiv s(10^{3\ell} n^3 + 10^\ell an + b) \pmod{k}. \tag{5}$$

Datorită faptului că ℓ satisface inegalităţile de mai sus, rezultă că

$$s(10^{3\ell} n^3 + 10^\ell an + b) = s(10^{3\ell} n^3) + s(10^\ell an) + s(b) = s(n^3) + s(an) + s(b). \tag{6}$$

Din (5) şi (6) deducem că

$$s(n^3 + an + b) \equiv s(n^3) + s(an) + s(b) \pmod{k},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Căutăm un număr $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $n = 10^r \cdot m$ cu $m \equiv 1 \pmod{100}$. În plus, vrem ca $b < 10^r$ şi $9 \cdot 10^{3r} < an < 10^{3r+1}$. Ultimul şir de inegalităţi este echivalent cu $\dfrac{9 \cdot 10^{2r}}{a} < m < \dfrac{10^{2r+1}}{a}$. Pentru a garanta existenţa unui $m \equiv 1 \pmod{100}$ între $\dfrac{9 \cdot 10^{2r}}{a}$ şi $\dfrac{10^{2r+1}}{a}$, trebuie ca $\dfrac{10^{2r+1}}{a} - \dfrac{9 \cdot 10^{2r}}{a} > 100 \Longleftrightarrow 10^r > 10\sqrt{a}$.

Într-adevăr, dacă $\dfrac{10^{2r+1}}{a} - \dfrac{9 \cdot 10^{2r}}{a} > 100$, atunci $\dfrac{10^{2r+1}}{a} > \dfrac{9 \cdot 10^{2r}}{a} + 100$, deci $\left[\dfrac{10^{2r+1}}{a}\right] \geq \left[\dfrac{9 \cdot 10^{2r}}{a} + 100\right] = \left[\dfrac{9 \cdot 10^{2r}}{a}\right] + 100$. Printre numerele consecutive

$$\left[\frac{9 \cdot 10^{2r}}{a}\right] + 1, \ldots, \left[\frac{9 \cdot 10^{2r}}{a}\right] + 100$$

există un număr congruent cu 1 modulo 100, şi acesta este numărul m căutat.

În concluzie, există n cu proprietăţile de mai sus dacă alegem r astfel încât $10^r > \max\{10\sqrt{a}, b\}$.

Avem că $n^3 = 10^{3r} m^3$, unde $m^3 \equiv 1 \pmod{100}$, deci n^3 are forma

$$\star \ldots \star\, 01 \underbrace{00 \ldots 0}_{3r \text{ zerouri}}.$$

Apoi, an este de forma:

$$9\underbrace{\star\star\ldots\star}_{3r\text{cifre}},$$

unde ultimele q cifre sunt egale cu 0 (q este numărul cifrelor lui b). Avem astfel că:

$$s(n^3+an+b) = s(n^3)+s(an)+s(b)-9 \tag{7}$$

$\square$

Din (6) şi (7) deducem că $9 \equiv 0 \pmod{k}$, adică k este fie 3, fie 9.

Folosind acum faptul că $s(n) \equiv n \pmod 9$, $\forall n \in \mathbb{N}$, avem că dacă $k|9$ atunci

$$s(n^3+an+b) \equiv s(n) \pmod{k}, \forall n \in \mathbb{N} \Longleftrightarrow n^3+an+b \equiv n \pmod{k}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dând lui n valorile 0 şi 1 obţinem că $a \equiv b \equiv 0 \pmod{k}$, deci

$$s(n^3+an+b) \equiv s(n) \pmod{k}, \forall n \in \mathbb{N} \Longleftrightarrow n^3 \equiv n \pmod{k}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Acest lucru se întâmplă dacă şi numai dacă $k=3$.

CLASA A X-a

Problema 1. Determinaţi numerele $a, b, c \in \mathbb{C}^*$ pentru care

$$|a\bar{b} + b\bar{c} + c\bar{a}| = |a|^2 + |b|^2 + |c|^2.$$

Mihai Opincariu

Soluţie. Din inegalitatea modulului şi din identitatea $|z| = |\bar{z}|$ avem $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 = |a\bar{b} + b\bar{c} + c\bar{a}| \leqslant |a\bar{b}| + |b\bar{c}| + |c\bar{a}| = |a||b| + |b||c| + |c||a|$, de unde se obţine $|a| = |b| = |c|$ (1).

Fie $z_1 = a\bar{b}$, $z_2 = b\bar{c}$ şi $z_3 = c\bar{a}$. Folosind (1) avem, $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1| + |z_2| + |z_3|$. Aceasta implică faptul că numerele complexe z_1, z_2, z_3 au acelaşi argument şi, având şi acelaşi modul, obţinem că $z_1 = z_2 = z_3$.

Atunci $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a} = \frac{a+b+c}{b+c+a} = 1$, deci $a = b = c$. Reciproc, observăm ca orice triplet de numere complexe nenule egale verifică relaţia dată.

$\square$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ŢIŢEICA

Ediţia 2, Craiova, 22 martie 2025

Problema 2. Fie $n \geqslant 2$ şi funcţiile $f, g : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ astfel încât

$$g(k) = \text{card}\{i \in \{1, 2, \ldots, n\} | f(i) \leqslant f(k)\},$$

pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

a) Arătaţi că f este bijectivă dacă şi numai dacă g este bijectivă.

b) Dacă g este o funcţie dată, determinaţi, în funcţie de g, numărul de funcţii f care verifică proprietatea dată.

Silviu Cristea

Soluţie. a) Dacă f este bijectivă, $\text{card}\{i \in \{1, 2, \ldots, n\} | f(i) \leqslant f(k)\} = f(k)$, pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, de unde deducem că $g = f$. În particular şi g este bijectivă.

Dacă g este bijectivă, observăm că f trebuie să fie injectivă. Într-adevăr, dacă $f(k) = f(p)$, atunci $g(k) = g(p)$, deci $k = p$. Cum f mapează injectiv elementele unei mulţimi finite în aceeaşi mulţime, ea este bijectivă.

b) Din definiţia lui g observăm că $g(k) = g(p)$ dacă şi numai dacă $f(k) = f(p)$. Într-adevăr, dacă $f(k) = f(p)$, atunci este imediat că $g(k) = g(p)$. Reciproc, dacă $g(k) = g(p)$, atunci $\text{card}\{x \in Im(f) | x \leqslant f(k)\} = \text{card}\{x \in Im(f) | x \leqslant f(p)\}$, iar cum $f(k), f(p) \in Im(f)$, avem $f(k) = f(p)$. Atunci $\text{card}\, Im(f) = \text{card}\, Im(g)$.

Fie $Im(g) = \{g_1 < g_2 < \ldots < g_t\}$. Pentru orice $A \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ cu $|A| = t$, există o unică funcţie f care verifică. Într-adevăr, dacă $A = \{a_1 < a_2 < \ldots < a_t\}$, atunci trebuie să avem $f^{-1}(a_k) = g^{-1}(g_k)$, pentru orice $k = 1, \ldots, t$.

Atunci, pentru g fixată, numărul de funcţii f care verifică este $C_n^{|Im(g)|}$.

$\square$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 2, Craiova, 22 martie 2025

Problema 3. Fie $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ o funcţie cu proprietatea că

$$f(x+f(y))=f(x+y)+f(y),\ \text{pentru orice } x,y>0.$$

a) Arătaţi că $f(x)>x$, pentru orice $x>0$.
b) Arătaţi că $g:(0,\infty)\to(0,\infty)$ definită prin $g(x)=f(x)-x$, este injectivă.
c) Determinaţi toate funcţiile f cu proprietatea dată.

Olimpiadă Tailanda

Soluţie. a) Dacă există $y\in(0,\infty)$ astfel încât $f(y)=y$, înlocuind în relaţia din ipoteză, obţinem $y=0$, ceea ce este imposibil.

Dacă $f(x)<x$ pentru un $x\in(0,\infty)$, atunci avem $f(x)=f((x-f(x))+f(x))=f(2x-f(x))+f(x)$, deci $f(2x-f(x))=0$, fals. Atunci, avem că $f(x)>x$ pentru orice $x>0$.

b) Relaţia dată se rescrie $g(t+g(y))=g(t)+y$, pentru orice $t>y>0$ (1). De aici, fixând pe t, deducem că g este injectivă (2).

c) Mai departe, $g(t+g(x)+g(y))=g(t+g(x))+y=g(t)+x+y=g(t+g(x+y))$, pentru orice $x,y>0$ şi $t>x,y$. Din (2) deducem atunci că $g(x+y)=g(x)+g(y)$, pentru orice $x,y>0$ (3).

Din (1) şi (3) rezultă $g(g(y))=y$, pentru orice $y>0$.

Relaţia (3) implică faptul că g este strict crescătoare. Atunci, dacă $g(x)>x$, atunci $g(g(x))>g(x)>x$, contradicţie. Analog $g(x)<x$ duce la o contradicţie.

Am obţinut că $g(x)=x$ şi $f(x)=2x$, pentru orice $x>0$. Funcţia $f(x)=2x$ îndeplineşte condiţiile problemei.

$\square$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 2, Craiova, 22 martie 2025

Problema 4. O cetate aflată în riscul de a fi atacată îşi stabileşte turnuri de apărare, pe care le reprezentăm ca $n \geqslant 3$ puncte în plan, astfel încât oricare trei dintre ele nu sunt coliniare. Orice poligon convex având vârfurile printre aceste puncte este numit bază. În fiecare turn de apărare se află câte un soldat. Pentru fiecare bază, statul plateşte câte $k \cdot 2^k$ monede fiecărui soldat aflat în turnurile de pe frontiera bazei, unde k este numărul de soldaţi aflaţi în interiorul (şi nu pe frontierele) bazei. Arătaţi că statul poate plăti soldaţii dintr-un buget de $n(n+1) \cdot 2^{n-3}$ monede, indiferent de localizarea celor n turnuri de apărare.

Cristi Săvescu

Soluţie. Fie A mulţimea celor n puncte în care sunt turnurile. Fie $t \in \{3, 4, \ldots, n\}$ fixat şi $T \subseteq A$ o submulţime de cardinal t. Atunci T se scrie în mod unic sub forma $T = P \cup Q$, unde P este muţimea punctelor din T care se află pe frontiera înfăşurătoarei convexe a lui T iar Q sunt punctele din T care se află în interiorul acesteia.

Atunci, dacă statul plăteşte 2 monede fiecărui soldat din P pentru fiecare soldat din Q, arătăm ulterior că atunci când parcurgem toate submulţimile $T \subseteq A$ cu $|T| \geqslant 3$, plăţile sunt conforme cu ipoteza. Atunci, pentru T, statul plateşte în total $2 \cdot |P| \cdot |Q| \leqslant 2 \cdot \left(\dfrac{|P|+|Q|}{2}\right)^2 = \dfrac{t^2}{2}$ monede.

Într-adevăr, pentru mulţimile T pentru care P este înfăşurătoarea convexă, se vor plăti câte 2 monede fiecărui soldat de pe P atunci când numărăm câte un soldat din interiorul lui P. Fiecare soldat s din interiorul lui P este numărat însă în toate submulţimile de puncte interioare de forma $\{s\} \cup R$, unde $R \subseteq Int(P) \setminus \{s\}$, adică de $2^{|Int(P)-1|}$ ori. Aşadar, fiecare soldat de pe frontieră va primi $2^{|Int(P)|}$ monede pentru s, deci în total $|Int(P)| \cdot 2^{|Int(P)|}$ monede.

Suma plătită de stat este $S \leqslant \displaystyle\sum_{t=3}^{n} \sum_{\substack{T\subseteq A\\ |T|=t}} \frac{t^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=3}^{n} C_n^k \cdot k^2 < \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot k^2.$

Dar $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot k^2 = n(n+1) \cdot 2^{n-2}$, de unde rezultă concluzia.

$\square$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 2, Craiova, 22 martie 2025

CLASA A XI-a

Problema 1. Să se determine toate funcţiile continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ care satisfac egalitatea

$$f(x+y) = f(x+f(y)),$$

pentru toţi $x, y \in \mathbb{R}$.

Gheorghe Răuţu

Soluţie. *Varianta 1* Dacă f este injectivă atunci se deduce imediat din egalitatea din enunţ că $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Altfel, există $y_1 < y_2$ cu $f(y_1) = f(y_2)$. Avem că

$$f(x+y_1) = f(x+f(y_1)) = f(x+f(y_2)) = f(x+y_2), \forall x \in \mathbb{R},$$

de unde se obţine că f este periodică de perioadă $y_2 - y_1$. Fie mulţimea perioadelor funcţiei f:

$$\mathcal{F} = \{t > 0 | f(x+t) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

Dacă 0 este punct de acumulare al lui $\mathcal{F}$ atunci există în $\mathcal{F}$ un şir $t_n \to 0$. Avem că

$$f(x) = f\left(x - \left[\frac{x}{t_n}\right] t_n\right) = f\left(\lim_{n\to\infty}\left(x - \left[\frac{x}{t_n}\right] t_n\right)\right) = f(0),$$

unde ultima egalitate se obţine astfel: $\left[\frac{x}{t_n}\right] \le \frac{x}{t_n} < \left[\frac{x}{t_n}\right] + 1 \Longrightarrow 0 \le x - \left[\frac{x}{t_n}\right] t_n < t_n$, deci $\lim_{n\to\infty}\left(x - \left[\frac{x}{t_n}\right] t_n\right) = 0$. Am obţinut în acest caz că f este funcţia constantă.

Dacă 0 nu este punct de acumulare al lui $\mathcal{F}$ atunci această mulţime are un infimum $t > 0$ şi cum f este o funcţie continuă se obţine imediat că $t \in \mathcal{F}$. Este clar că f este injectivă pe intervalul $(0, t)$, altfel există $0 < y_1 < y_2 < t$ astfel încât $f(y_1) = f(y_2)$ şi cu argumentul de mai sus se obţine că $y_2 - y_1 \in \mathcal{F}$. Inegalitatea $0 < y_2 - y_2 < t$ contrazice minimalitatea lui t, ceea ce reprezintă o contradicţie. Deci, f este injectivă pe intervalul $(0, t)$ şi cum este şi continuă, înseamnă că este strict monotonă pe acest interval. Atunci, pentru orice $a \in (0, t)$ avem

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) < f(a) < \lim_{x\to t} f(x) = f(t),$$

ceea ce contrazice egalitatea $f(0) = f(t)$. Am obţinut o contradicţie, deci singurele funcţii care verfică condiţiile din enunţ sunt funcţiile constante şi funcţia identitate.

Varianta 2 Înlocuind pe x cu $x-y$ în relaţia din enunţ obţinem

$$f(x) = f(x+f(y)-y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Deducem că $f(y)-y \in \mathcal{F}$, $\forall y \in \mathbb{R}$. Dacă $f(y) = y$, $\forall y \in \mathbb{R}$, atunci f este funcţia identitate, care verifică cerinţele problemei. Altfel, există un $y_0 \in \mathbb{R}$ pentru care $f(y_0) \neq y_0$, cu alte cuvinte, mulţimea de perioade $\mathcal{F}$ este nevidă. Dacă există un $y \in \mathbb{R}$ astfel încât $\dfrac{f(y)-y}{f(y_0)-y_0} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ atunci, conform criteriului de densitate al lui Kronecker, mulţimea

$$\{m(f(y)-y)+n(f(y_0)-y_0)|m, n \in \mathbb{Z}\}$$

este densă în $\mathbb{R}$. Deoarece f este constantă egală cu $f(0)$ pe această mulţime, rezultă că f este constantă.

Investigăm acum cazul în care $\dfrac{f(y)-y}{f(y_0)-y_0} \in \mathbb{Q}$, $\forall y \in \mathbb{R}$. Deoarece f este continuă şi funcţia $\dfrac{f(y)-y}{f(y_0)-y_0}$ este de asemenea continuă, ceea ce împreună cu $\dfrac{f(y)-y}{f(y_0)-y_0} \in \mathbb{Q}$ ne dă că $\dfrac{f(y)-y}{f(y_0)-y_0}$ este funcţia constantă. Se obţine că există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(y) = y+a$, $\forall y \in \mathbb{R}$. Substituind această expresie în relaţia din enunţ găsim că $a = 0$, deci f este funcţia identitate.

Varianta 3 Arătăm că f este fie funcţia constantă, fie funcţia identitate. Notăm cu $\mathrm{Im} f = \{f(x)|x \in \mathbb{R}\}$ imaginea funcţiei f. Substituind $x = 0$ în relaţia din enunţ găsim că $f(y) = f(f(y))$, $\forall y \in \mathbb{R}$. Cu alte cuvinte, $f(x) = x$, $\forall x \in (a, b)$, unde a şi b sunt infimul şi supremul mulţimii $\mathrm{Im} f$, care este un interval pentru că f este continuă.

Să presupunem că f nu este constantă şi a este finit. Din continuitate se obţine că $f(a) = a$ şi $f(x) = x$, $\forall x \in [a, a+2d]$ pentru un $d > 0$. În acest caz, pentru orice $0 < t < d$ avem că $f(a-t) = a+s$ pentru un $s > d$. Într-adevăr, dacă $s \leq d$ atunci

$$a = f(t+a-t) = f(t+f(a-t)) = f(a+t+s) = a+t+s,$$

ceea ce este imposibil. Am obţinut că $f(x) > a+d$, $\forall x \in (a-d, a)$ şi $f(a) = a$, ceea ce contrazice faptul că f are proprietatea lui Darboux. Am arătat că dacă f nu este constantă atunci $a = -\infty$. Analog se arată că $b = \infty$, cu alte cuvinte f este funcţia identitate. $\square$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 2, Craiova, 22 martie 2025

Problema 2. Fie $n \geq 2$ și fie $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât

$$\{\operatorname{rang}(A^k) \mid k \geq 1\} = \{\operatorname{rang}(B^k) \mid k \geq 1\}.$$

Arătaţi că $\operatorname{rang}(A^k) = \operatorname{rang}(B^k)$, pentru orice $k \geq 1$.

Cristi Săvescu

Soluţie. <u>*Varianta 1*</u>

Arătăm prin inducţie că, dacă $r = \operatorname{rang}(A^k) = \operatorname{rang}(A^{k+1})$ pentru un $k \geq 1$, atunci $\operatorname{rang}(A^m) = r$ pentru orice $m \geq k$. Cazurile $m = k$ şi $m = k+1$ sunt date în ipoteză. Fie acum $r = \operatorname{rang}(A^{m-1}) = \operatorname{rang}(A^m)$ pentru un $m \geq k+1$, atunci

$$\operatorname{rang}(A^{m+1}) = \operatorname{rang}(A^m A) \leq \operatorname{rang}(A^m) = r.$$

Pe de altă parte, dacă aplicăm inegalitatea lui Frobenius pentru matricele A, A^{m-1}, A atunci

$$\operatorname{rang}(A^m) + \operatorname{rang}(A^m) \leq \operatorname{rang}(A^{m+1}) + \operatorname{rang}(A^{m-1}).$$

Rezultă că $r \leq \operatorname{rang}(A^{m+1})$, deci $\operatorname{rang}(A^{m+1}) = r$.

Acest fapt arătă că şirul $(\operatorname{rang}(A^k))_{k\geq 1}$ este constant de la un anumit rang încolo, iar până la acel rang este un şir strict descrescător.

Avem următoarea lemă:

Lemă. Fie $(r_n)_{n\geq 1}$ şi $(s_n)_{n\geq 1}$ două şiruri de numere reale care sunt constante de la un anumit rang încolo şi sunt strict descrescătore până la acel rang. Dacă

$$\{r_n | n \geq 1\} = \{s_n | n \geq 1\},$$

atunci cele două şiruri sunt egale.

Demonstrăm prin inducţie după $n \geq 1$ că $r_n = s_n$ pentru orice n. Pentru $n = 1$, avem $r_1 = s_1$, deoarece r_1 şi s_1 sunt cele mai mari elemente din mulţimile de valori ale celor două şiruri.

Presupunem acum că $r_i = s_i$ pentru orice $1 \leq i \leq n$ şi arătăm că $r_{n+1} = s_{n+1}$. Procedăm prin reducere la absurd şi presupunem, fără a pierde din generalitate, că $r_{n+1} > s_{n+1}$. Distingem două cazuri:

- Dacă $r_n = r_{n+1}$, atunci şirul $(r_n)_{n\geq 1}$ devine constant de la n încolo, deci r_{n+1} este cel mai mic element al mulţmii valorilor acestuia. Pe de altă parte, muţimea valorilor şirului $(s_n)_{n\geq 1}$ conţine un element s_{n+1} care este strict mai mic decât r_{n+1}, ceea ce contrazice ipoteza.

- Dacă $r_n > r_{n+1}$, atunci

$$r_n = s_n > r_{n+1} > s_{n+1}.$$

prin urmare, r_{n+1} aparţine muţimii valorilor primului şir, dar nu şi muţimii valorilor celui de-al doilea şir, ceea ce contrazice din nou ipoteza.

Astfel, în ambele cazuri obţinem o contradicţie, deci $r_{n+1} = s_{n+1}$.

Aplicând acum lema în cazul celor două şiruri $(\text{rang}(A^k))_{k\geq 1}$ şi $(\text{rang}(B^k))_{k\geq 1}$, concluzionăm că $\text{rang}(A^k) = \text{rang}(B^k)$, pentru orice $k \geq 1$.

Varianta 2

Este clar că avem egalitatea

$$\text{rang}(A^k) = \text{rang}(J^k), \forall k \geq 1,$$

unde J este formă canonică Jordan asociată matricei A. Astfel, demonstraţia problemei se reduce la cazul în care A şi B sunt în forma canonică Jordan.

Dacă un bloc Jordan are un număr nenul pe diagonala principală, atunci orice putere a sa are rang constant, egal cu dimensiunea blocului. Dacă un bloc Jordan $\mathcal{J}$ de dimensiune m are 0 pe diagonala principală atunci $\text{rang}(\mathcal{J}^k) = m - k$, $\forall\ 0 \leq k \leq m$ şi $\text{rang}(\mathcal{J}^k) = 0$, $\forall\ k > m$. În plus, este uşor de arătat că o matrice J în forma canonică Jordan având blocurile Jordan $\mathcal{J}_1, ..., \mathcal{J}_s$, satisface relaţia:

$$\text{rang}(J^k) = \text{rang}(\mathcal{J}_1^k) + ... + \text{rang}(\mathcal{J}_s^k), \forall k \geq 1.$$

Pentru un bloc Jordan J_i care are un element nenul pe diagonala principala, avem ca $\text{rang}(J_i^k) = \text{rang}(J_i)$ pentru orice $k \geq 1$. Pe de alta parte, daca blocul Jordan J_i este nilpotent (are numai elementul 0 pe diagonala principala), atunci $\text{rang}(J_i^k) = \text{rang}(J_i^{k-1}) - 1$ daca $2 \leq k \leq \dim(J_i)$ si $\text{rang}(J_i^k) = 0$ daca $k \geq \dim(J_i)$.

Deducem că şirul $(\text{rang}(A^k))_{k\geq 1}$ este constant de la un anumit rang încolo (mai precis de la dimensiunea maxima a unui subbloc Jordan nilpotent), iar până la acel rang este un şir strict descrescător. Apoi se finalizează ca în prima variantă folosind Lema de mai sus.

$\square$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 2, Craiova, 22 martie 2025

Problema 3. Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ șirul de numere reale definit prin $a_0 \geq 0$ și

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 - 1}{n+1},$$

pentru orice $n \geq 0$. Demonstrați că există un număr real $a > 0$ astfel încât:

- Pentru orice $a_0 \geq a$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$;
- Pentru orice $0 \leq a_0 < a$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Soluţie. *Varianta 1*

Vom arăta că $a = 2$.
Mai întâi observăm că $a_{n+1} \geq -\frac{1}{n+1} \geq -1$, $\forall n \geq 0$.

- Dacă $0 \leq a_0 \leq 1$, atunci se arată uşor prin inducţie că $-1 \leq a_n \leq 0$, pentru orice $n \geq 1$. Deci $-\frac{1}{n+1} \leq a_n \leq 0$, astfel că $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

- Dacă $a_0 \geq 2$, atunci se arată uşor prin inducţie că $a_n \geq n + 2$ pentru orice $n \geq 0$, astfel că $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

- Fie acum $1 < a_0 < 2$. Arătăm mai întâi că există măcar un termen al şirului mai mic sau egal cu 1. Presupunem prin reducere la absurd că $1 < a_n$, $\forall n \geq 0$. În acest caz, ţinând cont că $a_0 < 2$, se arată imediat prin inducţie că $a_n < n+2$, $\forall n \geq 0$. Avem că

$$\frac{a_{n+1}}{n+3} = \frac{a_n^2 - 1}{(n+1)(n+3)} = \frac{a_n^2 - 1}{(n+2)^2 - 1} < \left(\frac{a_n}{n+2}\right)^2,$$

pentru orice $n \geq 0$. Iterând inegalitatea de mai sus obţinem

$$\frac{a_n}{n+2} < \left(\frac{a_0}{2}\right)^{2^n} \Longrightarrow 1 < a_n < (n+2)\left(\frac{a_0}{2}\right)^{2^n},$$

pentru orice $n \geq 0$. Am obţinut o contradicţie pentru că $\lim_{n\to\infty}(n+2)\left(\frac{a_0}{2}\right)^{2^n} = 0$. Cu alte cuvinte, există măcar un termen al şirului mai mic sau egal cu 1.

Fie acum $m \geq 1$ astfel încât $a_m \leq 1$. Ca mai sus, se arată uşor prin inducţie că $-\frac{1}{n} \leq a_n \leq 0$, pentru orice $n \geq m+1$. Astfel, se obţine că $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Varianta 2

Definim şirul

$$x_n = \sqrt{1 + 1\cdot\sqrt{1 + 2\cdot\sqrt{1 + \ldots + (n-1)\cdot\sqrt{1+n}}}}, \quad \forall n \geq 0.$$

Să notăm că $x_0 = 1$, $x_1 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{1+\sqrt{1+2}} = \sqrt{1+\sqrt{3}}$ etc. Vom demonstra că şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent. Mai întâi arătăm că şirul este crescător. Pentru orice $n \geq 1$, avem că $\sqrt{1+n} > 1$, deci

$$\begin{aligned} x_n &= \sqrt{1+1\cdot\sqrt{1+2\cdot\sqrt{1+...+(n-1)\cdot\sqrt{1+n}}}} > \\ & \sqrt{1+1\cdot\sqrt{1+2\cdot\sqrt{1+...+(n-2)\cdot\sqrt{1+n-1}}}} = x_{n-1}. \end{aligned}$$

Acum demonstrăm că $x_n < 2$, $\forall n \geq 0$. Pentru $n = 0$, avem $x_0 = 1 < 2$. Fixăm $n \geq 1$ şi definim şirul finit auxiliar:

$$y_1 = \sqrt{1+n}, \quad y_i = \sqrt{1+(n-i+1)y_{i-1}}, \quad \forall 2 \leq i \leq n.$$

Este clar că $y_n = x_n$. Vom arăta prin inducţie că $y_i < n-i+2$ pentru orice $1 \leq i \leq n$.

- Pentru $i = 1$, avem $y_1 = \sqrt{1+n} < n+1$, ceea ce este adevărat pentru $n \geq 1$.
- Presupunem că $y_i < n-i+2$ pentru un $i < n$. Atunci,

$$y_{i+1} = \sqrt{1+(n-i)y_i} < \sqrt{1+(n-i)(n-i+2)} = \sqrt{(n-i+1)^2} = n-i+1.$$

Prin urmare, pentru $i = n$, obținem $y_n < 2$, iar cum $x_n = y_n$, rezultă $x_n < 2$. Astfel, am demonstrat că $(x_n)_{n\geq 0}$ este strict crescător și mărginit, deci convergent, conform criteriului lui Weierstrass. Notăm limita sa cu a, astfel încât $1 < a \leq 2$.

Arătăm acum că acest număr satisface cerinţa problemei. Avem:

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 - 1}{n+1} \geq -\frac{1}{n+1} \geq -1, \quad \forall n \geq 0.$$

Dacă există un s astfel încât $-1 \leq a_s \leq 1$, atunci prin inducţie se poate arăta că $a_n \leq 0$, $\forall n > s$, ceea ce duce la

$$-\frac{1}{n+1} \leq a_n \leq 0, \quad \forall n > s,$$

şi astfel $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

• Cazul 1: $0 \leq a_0 < a$. Deoarece x_n creşte spre a, există un $t \geq 1$ astfel încât $a_0 < x_t < a$. Fixăm un astfel de t.

Dacă există un s cu $1 \leq s \leq t$ astfel încât $-1 \leq a_s \leq 1$, atunci $a_n \to 0$ şi am terminat.

Presupunem deci că $a_s > 1$ pentru $1 \leq s \leq t$. Definim şirul finit $(y_n)_{1\leq n\leq t}$ ca mai sus şi arătăm prin inducţie după i cu $0 \leq i \leq t-1$, că $a_i < y_{t-i}$. Pentru $i = 0$, $a_0 < x_t = y_t$. Fie acum $a_i < y_{t-i}$ şi cum $a_i > 1$ obţinem prin ridicare la pătrat că

$$a_i^2 < y_{t-i}^2 \Longrightarrow a_{i+1} = \frac{a_i^2 - 1}{i+1} < \frac{y_{t-i}^2 - 1}{i+1} = y_{t-i-1},$$

ceea ce încheie inducţia.

Punând $i = t - 1$, rezultă că $a_{t-1} < y_1 = \sqrt{1+t}$, iar de aici $a_t < 1$. Aplicând argumentul anterior, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

• Cazul 2: $a_0 \geq a$. Atunci $a_0 \geq x_t = y_t$, pentru orice $t \geq 1$. La fel ca în cazul anterior, se arată prin inducţie după $0 \leq i \leq t-1$ că $a_i \geq y_{t-i}$. Punând $i = t-1$, obținem $a_{t-1} \geq y_1 = \sqrt{t+1}$, $\forall t \geq 1$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Observaţie: Dacă cele două demonstraţii sunt corecte atunci limita şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ din *Varianta 2* trebuie să fie 2. O discuţie legată de acest subiect se găseşte la https://math.stackexchange.com/questions/7204/evaluating-the-nested-radical-sqrt1-2-sqrt1-3-sqrt1-cdots. $\square$

CONCURSUL
DE MATEMATICĂ
ȚIȚEICA

Ediţia 2, Craiova, 22 martie 2025

Problema 4. Fie $\mathcal{M}$ o submulţime a mulţimii S_n a permutărilor mulţimii $\{1, 2, ...$ $.., n\}$, cu $n \geq 2$, care conţine cel puţin două elemente, astfel încât pentru orice $\sigma, \tau \in \mathcal{M}$ avem că $\sigma\tau \in \mathcal{M}$. Se consideră o funcţie $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ care satisface inegalitatea:

$$|f(\sigma\tau) - f(\sigma) - f(\tau)| \leq 1, \forall \sigma, \tau \in \mathcal{M}.$$

Să se demonstreze că:

$$\max_{\sigma,\tau\in\mathcal{M}} |f(\sigma) - f(\tau)| \leq 2 - \frac{2}{|\mathcal{M}|},$$

unde $|\mathcal{M}|$ denotă cardinalul mulţimii $\mathcal{M}$.

Soluţie. În primul rând, să observăm că pentru orice $\sigma \in \mathcal{M}$, funcţia

$$g_\sigma : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}, g_\sigma(\tau) = \sigma\tau, \forall \tau \in \mathcal{M}$$

este bijectivă. Deoarece mulţimea $\mathcal{M}$ este finită, este suficient să arătăm că g_σ este injectivă. Într-adevăr, dacă $g_\sigma(\tau_1) = g_\sigma(\tau_2)$, atunci $\sigma\tau_1 = \sigma\tau_2 \Longrightarrow \tau_1 = \tau_2$.

Fie acum $a, b \in \mathcal{M}$ astfel încât

$$d = \max_{\sigma,\tau\in\mathcal{M}} |f(\sigma) - f(\tau)| = f(b) - f(a).$$

Folosind observaţia de mai sus pentru a, b, deducem că

$$\sum_{\tau\in\mathcal{M}} f(b\tau) = \sum_{\tau\in\mathcal{M}} f(a\tau) \Longrightarrow \sum_{\tau\in\mathcal{M}} (f(b\tau) - f(a\tau)) = 0.$$

Pe de altă parte, avem

$$\begin{aligned} f(b\tau) - f(a\tau) &= (f(b\tau) - f(\tau) - f(b)) - (f(a\tau) - f(\tau) - f(a)) + f(b) - f(a) \\ &\geq d - 2. \end{aligned}$$

Notăm că permutarea identică e aparţine lui $\mathcal{M}$. Pentru orice $\sigma \in \mathcal{M}$, avem că $\sigma^m \in \mathcal{M}$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$. Alegând m egal cu ordinul lui σ, obţinem că $e \in \mathcal{M}$. Colectând, avem că

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\tau\in\mathcal{M}} (f(b\tau)-f(a\tau)) = f(b)-f(a) + \sum_{\tau\in\mathcal{M}\setminus\{e\}} (f(b\tau)-f(a\tau)) \\ &\geq d+(d-2)(|\mathcal{M}|-1). \end{aligned}$$

Rezultă imediat că

$$d \leq 2 - \frac{2}{|\mathcal{M}|}.$$

Observaţie: Inegalitatea obţinută este optimă, întrucât există exemple în care devine egalitate. Un astfel de exemplu este dat de mulţimea $\mathcal{M} = \{e, \sigma, ..., \sigma^{\ell-1}\}$, unde σ este un ciclu de lungime ℓ şi funcţia $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(\sigma^k) = \frac{2k-\ell}{\ell}$, $\forall k \in \{0, 1, , , , \ell-1\}$. Se verifică uşor că această funcţie satisface inegalitatea impusă şi că $f(\ell-1) - f(0) = \frac{\ell-2}{\ell} - (-1) = 2 - \frac{2}{\ell}$.

$\square$

CLASA A XII-a

Problema 1. Fie G un grup finit şi a un element fixat al lui G. Definim mulţimea

$$S_a = \{g \in G \mid ga \neq ag \text{ şi } ga^2 = a^2g\}.$$

Să se arate că:

1. Dacă $g \in S_a$, atunci $ag^{-1} \in S_a$.
2. Cardinalul mulţimii S_a este multiplu de 4.

Soluţie. Se arată uşor că dacă $g \in S_a$, atunci $g^{-1} \in S_a$.

1. Fie $g \in S_a$. Atunci $a^2(ag^{-1}) = a(a^2g^{-1}) = a(g^{-1}a^2) = (ag^{-1})a^2$. Pe de altă parte, dacă $(ag^{-1})a = a(ag^{-1})$, atunci $(ag^{-1})a = a^2g^{-1} = g^{-1}a^2$. Prin urmare, deducem că $ag^{-1} = g^{-1}a$, ceea ce contrazice faptul că $g^{-1} \in S_a$.

2. Din punctul 1. rezultă că, dacă $g \in S_a$, atunci $ag^{-1} \in S_a$. Iterând acest argument, obţinem că $a(ag^{-1})^{-1} = aga^{-1} \in S_a$. De asemenea, avem $a(aga^{-1})^{-1} = aag^{-1}a^{-1} = a^2g^{-1}a^{-1} = g^{-1}a^2a^{-1} = g^{-1}a \in S_a$. Observăm că, iterând încă o dată, obţinem că $a(g^{-1}a)^{-1} = aa^{-1}g = g$. Prin urmare, multimea S_a se partiţionează în submulţimi de forma $\{g, ag^{-1}, aga^{-1}, g^{-1}a\}$. Arătăm că orice astfel de submulţime are exact 4 elemente distincte. Este clar că este suficient să arătăm că g este diferit de celelalte trei elemente. Dacă $g = ag^{-1}$, atunci $g = a(ag^{-1})^{-1} = aga^{-1}$, deci $ga = ag$. Analog, dacă $g = g^{-1}a$ atunci $g = (g^{-1}a)^{-1}a = a^{-1}ga$, deci $ag = ga$. În final, dacă $g = aga^{-1}$, atunci obţinem din nou $ag = ga$. În toate cazurile, se obţine că g comută cu a, ceea ce contrazice $g \in S_a$. În concluzie, S_a se scrie ca o reuniune disjunctă de submulţimi cu 4 elemente, deci cardinalul lui S_a este multiplu de 4.

$\square$

Problema 2. Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Demonstraţi că:

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin(2x)) \sin x \, dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos^2 x) \cos x \, dx.$$

Soluţie. Facem schimbarea de variabilă $x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$ în $I = \int_0^{\pi/2} f(\sin(2x)) \sin x \, dx$ şi obţinem $I = \int_0^{\pi/2} f(\sin(2x)) \cos x \, dx$. Prin urmare, avem:

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} f(\sin(2x))(\sin x + \cos x) dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} f\left(\cos\left(2(x - \frac{\pi}{4})\right)\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx$$

Facem schimbarea de variabilă $x \mapsto x + \frac{\pi}{4}$ şi obţinem:

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(\cos(2x)) \cos(x) dx = \sqrt{2} \int_0^{\pi/4} f(\cos(2x)) \cos(x) dx,$$

unde pentru ultima egalitate am folosit faptul că integrandul este o funcţie pară. Folosind acum relaţia $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$, deducem că:

$$I = \sqrt{2} \int_0^{\pi/4} f(1 - 2\sin^2 x) \cos x \, dx.$$

Cum $0 \leq 2\sin^2(x) \leq 1$ pentru $x \in [0, \pi/4]$ putem face schimbarea de variabilă $t = \arcsin\left(\sqrt{2} \sin x\right)$ şi obţinem:

$$I = \int_0^{\pi/2} f(1 - \sin^2 t) \cos t \, dt = \int_0^{\pi/2} f(\cos^2 t) \cos t \, dt.$$

$\square$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 2, Craiova, 22 martie 2025

Problema 3. Fie $\mathcal{P}_n$ multimea tuturor polinoamelor monice de grad n cu coeficienţi reali. Demonstraţi că, pentru orice două numere reale $a < b$, avem:

$$\inf_{P \in \mathcal{P}_n} \int_a^b |P(x)| dx > 0.$$

Cristi Săvescu

Soluţie. Notăm cu $\varepsilon = \dfrac{b-a}{4n}$ şi considerăm un polinom $P \in \mathcal{P}_n$ cu rădăcinile complexe $z_1, ..., z_n$. Notăm cu $\alpha_1, ..., \alpha_n$ părţile reale ale rădăcinilor şi definim intervalele $I_i = (\alpha_i - \varepsilon, \alpha_i + \varepsilon)$.

Considerăm acum muţimea $S = [a, b] \setminus \cup_{i=1}^n I_i$. Deoarece orice reuniune de intervale deschise poate fi exprimată ca o reuniune disjunctă de intervale deschise, rezultă că S se poate scrie ca o reuniune disjunctă de intervale închise (unele dintre acestea putând fi degenerate, adică formate dintr-un singur punct). Măsura muţimii S este egală cu suma lungimilor acestor intervale şi este cel puţin egală cu $b-a-2n\varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$, unde egalitatea are loc când intervalele I_i sunt incluse in $[a, b]$ şi disjuncte două câte două.

Observăm că pentru orice $x \in S$ şi pentru fiecare $1 \le i \le n$, avem

$$|x - z_i| \ge |x - \alpha_i| \ge \varepsilon.$$

Prin urmare, rezultă că

$$|P(x)| = \prod_{i=1}^n |x - z_i| \ge \varepsilon^n, \forall x \in S.$$

Concluzionăm că:

$$\int_a^b |P(x)| dx \ge \int_S |P(x)| dx \ge \int_S \varepsilon^n \ge \frac{b-a}{2} \varepsilon^n = \frac{(b-a)^{n+1}}{n^n 2^{2n+1}}.$$

□

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 2, Craiova, 22 martie 2025

Problema 4. Fie R un inel. Considerăm $x, y \in R$ astfel încât $x^2 = y^2 = 0$. Demonstraţi că dacă $x + y - xy$ este nilpotent, atunci şi xy este nilpotent.

Janez Šter

Soluţie. Deoarece $(x + y)^m$ este suma cuvintelor în x şi y de lungime m, se deduce imediat că

$$(x+y)^{2n} = (xy)^n + (yx)^n, \forall n \geq 1.$$

Fie $a = x + y - xy$ şi $b = x + y + yx$, atunci $ab = ba = xy + yx$. Avem că

$$(ab)^n = (xy + yx)^n = \left((x+y)^2\right)^n = (x+y)^{2n} = (xy)^n + (yx)^n.$$

Deoarece a este nilpotent, rezultă că există un $k \geq 1$ astfel încât $a^k = 0$, deci $(ab)^k = a^k b^k = 0$. Prin urmare, avem $(xy)^k = -(yx)^k$. Demonstraţia se încheie observând că

$$(xy)^{k+1} = x(yx)^k y = -x(xy)^k y = 0.$$

$\square$