# CLASA A X-A

**Problema 1.** Fie $n \geqslant 3$ şi $A = \{1, 2, \dots, n\}$. Pentru orice $f : A \to A$, definim mulţimea

$$A_f = \{|f(1) - f(2)|, |f(2) - f(3)|, \dots, |f(n-1) - f(n)|, |f(n) - f(1)|\}.$$

Determinaţi cea mai mică, respectiv cea mai mare valoare pe care o poate lua cardinalul mulţimii $A_f$, când $f$ parcurge familia funcţiilor bijective definite pe $A$ cu valori în $A$.

*Silviu Cristea*
*Cluj-Napoca*

*Barem de corectare.* Fie $f : A \to A$ o bijecţie. Atunci există $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ pentru care $f(i) = 1$, iar din injectivitate, valorile $|f(i+1) - f(i)|$ şi $|f(i-1) - f(i)|$ sunt diferite (argumentele sunt luate modulo $n$). Atunci $|A_f| \geqslant 2$.
Dacă $f$ este funcţia identică, atunci $|A_f| = 2$.
Fie $f : A \to A$ o bijecţie, atunci $1 \leqslant |f(i) - f(j)| \leqslant n - 1$, pentru orice $i \neq j$.
Avem că $A_f \subseteq \{1, 2, \dots, n-1\}$, deci $|A_f| \leqslant n - 1$.
Dacă $f(1), f(2), \dots, f(n)$ sunt $1, n, 2, n-1, 3, n-2, \dots$, observăm că

$$A_f = \{1, 2, \dots, n-1\},$$

deci $|A_f| = n - 1$. Atunci, valorile cerute sunt 2 şi $n - 1$.

$\square$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

*Ediţia 1, Craiova, 23 martie 2024*

**Problema 2.** Fie $a, b, c > 1$. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\log_{a+b}(a^x + b) = \log_b((b+c)^x - c)$.

*Mihai Opincariu*
*Brad*

*Barem de corectare.* Notăm cu $t = \log_{a+b}(a^x + b) = \log_b((b + c)^x - c)$. Atunci avem relaţiile

$$(a + b)^t = a^x + b \tag{1}$$

şi

$$b^t + c = (b + c)^x \tag{2}$$

Dacă $x \geqslant t$, atunci din (1) avem $a^x + b \leqslant (a+b)^x$, sau $\left(\frac{a}{a+b}\right)^x + b\left(\frac{1}{a+b}\right)^x \leqslant 1$
Funcţia $f(x) = \left(\frac{a}{a+b}\right)^x + b\left(\frac{1}{a+b}\right)^x$ este strict descrescătoare, deci $x \geqslant 1$
Analog, folosind (2), obţinem $x \leqslant 1$, deci avem doar soluţia $x = 1$
Cazul $x \leqslant t$ se tratează analog. Singura soluţie este atunci $x = 1$

$\square$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

*Ediția 1, Craiova, 23 martie 2024*

**Problema 3.** Fie $n \geqslant 2$ un număr natural par. Determinaţi cel mai mare număr natural natural $m \geqslant 2^{n-2}+1$ cu proprietatea că există $m$ submulţimi distincte ale mulţimii $\{1,2,\dots,n\}$, oricare $2^{n-2}+1$ dintre ele având intersecţia vidă.

*Cristi Săvescu*
*Cluj-Napoca*

*Barem de corectare.* Notăm $n=2t$. Observăm că familia submulţimilor cu cel mult $t$ elemente verifică. Într-adevăr, fiecare $i \in \{1,2,\dots,n\}$ apare în submulţimile de forma $\{i\}\cup A$, unde $A \subset \{1,2,\dots,n\}\setminus\{i\}$ cu $|A| \leqslant t-1$, în număr de $\sum\limits_{k=0}^{t-1} C_{n-1}^k = \frac{1}{2}\cdot 2^{n-1} = 2^{n-2}$. Atunci $m \geqslant \sum\limits_{k=0}^{t} C_n^k$.

Fie $\mathcal{F}$ o familie cu $m$ submulţimi ale mulţimii $\{1,2,\dots,n\}$ care îndeplineşte condiţiile din enunţ. Notăm cu $a_i = |\{A \in \mathcal{F} | i \in A\}|$. Atunci $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \sum\limits_{A\in\mathcal{F}} |A|$ (1).

Din ipoteză avem $a_i \leqslant 2^{n-2}$, pentru orice $i \in \{1,2,\dots,n\}$, deci $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \leqslant n\cdot 2^{n-2}$ (2).

Întrucât $\{1,2,\dots,n\}$ are $C_n^k$ submulţimi cu $k$ elemente, pentru orice $k \in \{0,1,\dots,n\}$, avem $\sum\limits_{A\in\mathcal{F}} |A| \geqslant 0\cdot C_n^0 + 1\cdot C_n^1 + 2\cdot C_n^2 + \dots + t\cdot C_n^t + (t+1)\left(m - \sum\limits_{k=0}^{t} C_n^k\right)$ (3).

Cum $\sum\limits_{k=0}^{t} k\cdot C_n^k = n\cdot\sum\limits_{k=0}^{t-1} C_{n-1}^k = n\cdot 2^{n-2}$, din (1), (2) şi (3) deducem că $m \leqslant \sum\limits_{k=0}^{t} C_n^k$.

Aşadar valoarea maximă căutată este $m = \sum\limits_{k=0}^{t} C_n^k = \dfrac{2^n + C_n^{n/2}}{2}$.

$\square$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ŢIŢEICA

*Ediţia 1, Craiova, 23 martie 2024*

**Problema 4.** Determinaţi numerele naturale $n \geqslant 3$ pentru care există o mulţime $M$ de $n$ numere complexe nenule şi un număr natural nenul $m$ astfel încât $(1 + z_1z_2z_3)^m = 1$, pentru orice numere distincte două câte două $z_1, z_2, z_3 \in M$.

*Vlad Matei*
*Bucureşti*

*Barem de corectare.* Pentru $n = 3$, fie $M = \{z, v, w\}$ unde $zvw = \varepsilon - 1$, unde $\varepsilon$ este o rădăcină primitivă de ordinul 3 a unităţii. Atunci $(1 + zvw)^3 = \varepsilon^3 = 1$.

Pentru $n = 4$, fie $M = \sqrt[3]{5}\cdot\left\{\frac{1}{\varepsilon - 1}, \frac{1}{\varepsilon^2 - 1}, \frac{1}{\varepsilon^3 - 1}, \frac{1}{\varepsilon^4 - 1}\right\}$, unde $\varepsilon$ este o rădăcină primitivă de ordin 5 a unităţii. Elemente din $M$ au produsul $\sqrt[3]{5}$, deci orice produs a trei elemente ale sale este de forma $\varepsilon^i - 1$. Ipoteza se verifică pentru $m = 5$.

Arătăm că $n \geqslant 5$ nu verifică. Altfel, alegem $\{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\} \subset M$ şi $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{m} + i\sin\frac{2\pi}{m}$. Atunci $z_1z_2z_3 = \varepsilon^a - 1$, $z_3z_4z_5 = \varepsilon^b - 1$, $z_1z_3z_4 = \varepsilon^c - 1$ şi $z_2z_3z_5 = \varepsilon^d - 1$, unde $1 \leqslant a, b, c, d \leqslant m - 1$. Deducem că $(\varepsilon^a - 1)(\varepsilon^b - 1) = (\varepsilon^c - 1)(\varepsilon^d - 1)$ (1)

Conjugăm (1) şi obţinem $\frac{(\varepsilon^a - 1)(\varepsilon^b - 1)}{\varepsilon^{a+b}} = \frac{(\varepsilon^c - 1)(\varepsilon^d - 1)}{\varepsilon^{c+d}}$; ultima egalitate împreună cu (1) ne dă $\varepsilon^{a+b} = \varepsilon^{c+d}$. Revenind în (1), obţinem $\varepsilon^a + \varepsilon^b = \varepsilon^c + \varepsilon^d$, care se rescrie $\varepsilon^{a+c} + \varepsilon^{b+c} = \varepsilon^{2c} + \varepsilon^{c+d} = \varepsilon^{2c} + \varepsilon^{a+b}$ sau $(\varepsilon^a - \varepsilon^c)(\varepsilon^c - \varepsilon^b) = 0$, deci $a = c$ sau $b = c$, ceea ce ar implica $z_2 = z_4$ sau $z_1 = z_5$, fals. Aşadar, $n \in \{3, 4\}$.

$\square$