CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

*Ediţia 1, Craiova, 23 martie 2024*

# CLASA A VII-A

**Problema 1.** Fie $m, n, p$ trei numere naturale nenule şi considerăm numerele $m' = (m, np)$, $n' = (n, mp)$ şi $p' = (p, mn)$, unde $(a, b)$ este cel mai mare divizor comun al numerelor $a$ şi $b$. Să se arate că ecuaţia $x^m + y^n = z^p$ are soluţii în mulţimea numerelor naturale nenule dacă şi numai dacă ecuaţia $x^{m'} + y^{n'} = z^{p'}$ are soluţii în mulţimea numerelor naturale nenule.

*Luminiţa Popescu*
*Craiova*

*Barem de corectare.* Implicaţia directă este simplă. Într-adevăr dacă $(a, b, c)$ este o soluţie a ecuaţiei $x^m + y^n = z^p$, atunci $x = a^{\frac{m}{m'}}$, $y = b^{\frac{n}{n'}}$, $z = c^{\frac{p}{p'}}$ este o soluţie a ecuaţiei $x^{m'} + y^{n'} = z^{p'}$.
Fie acum $(a, b, c)$ o soluţie a ecuaţiei $x^{m'} + y^{n'} = z^{p'}$. Înmulţind egalitatea

$$a^{m'} + b^{n'} = c^{p'}$$

cu $a^{unp} b^{vmp} c^{wmn}$, unde $u, v, w$ sunt numere naturale, obţinem:

$$a^{m'+unp} b^{vmp} c^{wmn} + b^{n'+vmp} a^{unp} c^{wmn} = c^{p'+wmn} a^{unp} b^{vmp} \tag{1}$$

Dacă găsim numerele naturale $u, v, w$ astfel încât $m' + unp \equiv 0 \pmod{m}$, $n' + vmp \equiv 0 \pmod{n}$ şi $p' + wmn \equiv 0 \pmod{p}$, atunci egalitatea (1) devine

$$\left(a^{\frac{m'+unp}{m}} b^{vp} c^{wn}\right)^m + \left(b^{\frac{n'+vmp}{n}} a^{up} c^{wm}\right)^n = \left(c^{\frac{p'+wmn}{p}} a^{un} b^{vm}\right)^p;$$

cu alte cuvinte ecuaţia $x^m + y^n = z^p$ are soluţii în mulţimea numerelor naturale nenule.
Prin împărţire la $m'$ congruenţa $m' + unp \equiv 0 \pmod{m}$ este echivalentă cu

$$1 + u \cdot \frac{np}{m'} \equiv 0 \pmod{\frac{m}{m'}}. \tag{2}$$

Cum $m' = (m, np)$, deducem că $(\frac{m}{m'}, \frac{np}{m'}) = 1$ deci congruenţa (2) are soluţii. Acelaşi argument merge şi pentru celelalte două congruenţe, ceea ce încheie demonstraţia.

$\square$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

*Ediţia 1, Craiova, 23 martie 2024*

**Problema 2.** Să se arate că numărul:

$$\left\lfloor \frac{2024}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2023}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2022}{3} \right\rfloor + ... + \left\lfloor \frac{1013}{1012} \right\rfloor,$$

este par, unde $\lfloor x \rfloor$ reprezintă partea întreagă a numărului $x$.

***

*Barem de corectare.* Avem că:

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{2024}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2023}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2022}{3} \right\rfloor + ... + \left\lfloor \frac{1013}{1012} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{2025}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2025}{2} \right\rfloor + ... + \left\lfloor \frac{2025}{1012} \right\rfloor - 1012 \\ &= \left\lfloor \frac{2025}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2025}{2} \right\rfloor + ... + \left\lfloor \frac{2025}{2025} \right\rfloor - 2025 \end{aligned}$$

Rămâne să arătăm că $N := \left\lfloor \frac{2025}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2025}{2} \right\rfloor + ... + \left\lfloor \frac{2025}{2025} \right\rfloor$ este impar.
Pentru fiecare $1 \le i \le 2025$, fie $M_i$ mulţimea multiplilor nenuli ai lui $i$, mai mici sau egali cu $2025$. Atunci cardinalul lui $M_i$ este egal cu $\left\lfloor \frac{2025}{i} \right\rfloor$.
Se observă că fiecare număr $1 \le n \le 2025$ apare în exact $\tau(n)$ dintre mulţimile $M_1, M_2, ..., M_{2025}$, unde $\tau(n)$ este numărul divizorilor lui $n$.
Ştim că numerele $\tau(n)$ sunt pare, cu excepţia pătratelor perfecte, deci $\tau(n)$ este par cu excepţia numerelor $1^2, 2^2, ..., 45^2$.
Cum $N$ este suma cardinalelor mulţimilor $M_1, M_2, ..., M_{2025}$, înseamnă că $N$ este cardinalul reuniunii disjuncte a acestor mulţimi. În plus, fiecare element $n$ din reuniunea $M_1 \cup M_2 \cup ... \cup M_{2025} = \{1, 2, ..., 2025\}$ apare în reuniunea disjunctă de $\tau(n)$ ori, astfel că:

$$N = \tau(1) + \tau(2) + ... + \tau(2025).$$

Aplicând observaţia anterioară, $N$ are aceeaşi paritate ca şi $45$, deci este impar.

□

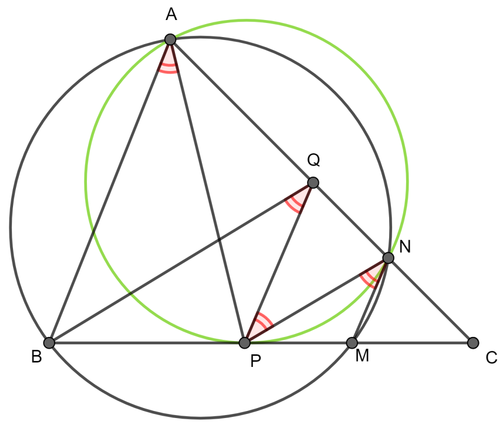
CONCURSUL DE MATEMATICĂ ŢIŢEICA

*Ediţia 1, Craiova, 23 martie 2024*

**Problema 3.** Fie $M$ un punct pe segmentul $BC$ al triunghiului $ABC$. Cercul circumscris triunghiului $ABM$ intersectează segmentul $AC$ într-un punct $N$ diferit de $A$. Se construieşte cercul ce trece prin punctele $A$, $N$ şi este tangent la segmentul $BC$ în $P$. Să se arate că $\measuredangle BAP \equiv \measuredangle PNM$.

***

*Barem de corectare.* Folosind puterea punctului $C$ faţă de cercul tangent la segmentul $BC$ avem că: $CP^2 = CN \cdot CA$. Pe de altă parte, puterea punctului $C$ faţă de cercul circumscris triunghiului $ABM$ ne dă: $CN \cdot CA = CM \cdot CB$. Din cele două egalităţi se obţine: $CP^2 = CM \cdot CB$ (1).




Construim paralela $PQ$ la $MN$, unde $Q$ aparţine segmentului $AN$. Din paralelism deducem că $\measuredangle PNM \equiv \measuredangle QPN$ (2).
În plus, obţinem şi că $\dfrac{CN}{CQ} = \dfrac{CM}{CP}$. Egalitatea (1) se rescrie sub forma $\dfrac{CM}{CP} = \dfrac{CP}{CB}$, astfel că $\dfrac{CN}{CQ} = \dfrac{CP}{CB}$. Am obţinut că $PN \parallel BQ$.
Din $PN \parallel BQ$ se deduce că $\measuredangle QPN \equiv \measuredangle BQP$, care împreună cu (2) ne dă că $\measuredangle PNM \equiv \measuredangle BQP$.
Pentru a încheia demonstraţia, rămâne să arătăm că $\measuredangle BAP \equiv \measuredangle BQP$. Pentru aceasta este suficient să observăm că patrulaterul $ABPQ$ este inscriptibil. Din $PQ \parallel NM$ avem că $\measuredangle AQP \equiv \measuredangle ANM$. În plus, $\measuredangle ABC + \measuredangle ANM = 180^\circ$ pentru că $ABMN$ este inscriptibil. Se obţine că $\measuredangle ABC + \measuredangle AQP = 180^\circ$, adică patrulaterul $ABPQ$ este inscriptibil.

$\square$

**Problema 4.** Pentru mulţimea $M$ formată din $n \geqslant 3$ puncte din plan numim *drum* o linie frântă $A_1A_2\ldots A_n$, cu proprietatea că $M = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ şi definim lungimea lui ca fiind suma $A_1A_2 + A_2A_3 + ... + A_{n-1}A_n$. Spunem despre mulţimea $M$ că este drum-unicată dacă orice două drumuri distincte au lungimi distincte şi că este segment-unicată dacă orice două segmente nedegenerate distincte cu capetele în puncte din $M$ au lungimi distincte. Determinaţi numerele naturale $n \geqslant 3$ în fiecare dintre cazurile:
a) orice mulţime $M$ de $n$ puncte din plan segment-unicată este drum-unicată.
b) orice mulţime $M$ de $n$ puncte din plan drum-unicată este segment-unicată.

*(liniile frânte nu sunt orientate, astfel că $A_1A_2\ldots A_n$ este aceeaşi cu $A_nA_{n-1}\ldots A_1$)*

*Cristi Săvescu*
*Cluj-Napoca*

*Barem de corectare.* a) Dacă $n = 3$, atunci fie $M = \{A, B, C\}$, astfel că segmentele nedegenerate posibile cu capetele în $M$ sunt $AB, BC$ şi $CA$. Drumurile vor avea lungimile $AB + BC$, $BC + CA$ şi $CA + AB$, iar din faptul că $AB, BC, CA$ sunt distincte ne rezultă că şi drumurile au lungimi distincte.

Aşadar, $n = 3$ verifică. .................................................**1 punct**
Pentru $n = 4$, considerăm de exemplu mulţimea $M$ formată din punctele $A$, $B$, $C$, $D$ cu $A$, $B$, $C$ coliniare (în această ordine) cu $AB = 1$, $BC = 3$, iar $D$ pe perpendiculara în $A$ pe $AC$ cu $AD = 2$. Atunci, $AB = 1$, $BC = 3$, $AC = 4$, $AD = 2$, $BD = \sqrt{5}$, $CD = 2\sqrt{5}$, iar drumurile $DBAC$ si $ADBC$ au lungimi egale: $DB + BA + AC = 5 + \sqrt{5}$ şi $AD + DB + BC = 5 + \sqrt{5}$.

Aşadar, $n = 4$ nu verifică.

Pentru orice $n \geqslant 5$, adaugăm inductiv configuraţiei pentru $n-1$ puncte un punct nou care să nu fie situat pe nicio mediatoare a segmentelor determinate de cele $n-1$ puncte (procesul inductiv începe cu configuraţia de mai sus pentru $n = 4$). Atunci acesta nu va fi egal depărtat de două puncte din configuraţia precedentă, deci noua configuraţie este segment-unicată. Drumurile $DBACX_1X_2\ldots X_{n-4}$ şi $ADBCX_1X_2\ldots X_{n-4}$ sunt distincte, dar de lungimi egale, deci configuraţia nu este drum unicată.

Aşadar, niciun $n \geqslant 5$ nu verifică.

Concluzionăm că doar $n = 3$ verifică.

b) Pentru $n = 3$, fie $M = \{A, B, C\}$. Presupunem că două segmente nedegenerate distincte cu capetele în $M$ ar avea lungimi egale, de exemplu $AB = AC$. Atunci drumurile $BCA$ şi $CBA$ au lungimi egale, ceea ce reprezintă o contradicţie.

Aşadar, $n = 3$ verifică.

Dacă $n = 4$, fie $M = \{A, B, C, D\}$. Analog cu cazul precendent, dacă $AB = AC$, atunci drumurile $BCAD$ şi $CBAD$ au lungimi egale, ceea ce contrazice ipoteza. Dacă avem $AB = CD$, atunci drumurile $CBAD$ şi $ADCB$ au lungimi egale; am obţinut din nou o contradicţie.

Aşadar, $n = 4$ verifică.

Dacă $n \geqslant 5$, atunci scriem pe $M$ ca reuniunea disjunctă $M = \{A, B, C, D\} \cup L$, unde $L \cap \{A, B, C, D\} = \emptyset$. Fie $\ell$ un drum oarecare pentru $L$. Analog cu cazul precendent, dacă $AB = AC$, considerăm drumurile $BCAD\ell$ şi $CBAD\ell$ care au lungimi egale. Dacă $AB = CD$, atunci drumurile $CBA\ell D$ şi $A\ell DCB$ au lungimi egale.

Aşadar, orice $n \geqslant 5$ verifică.

În concluzie, orice $n \geqslant 3$ este o soluţie.

$\square$