CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 1, Craiova, 23 martie 2024

CLASA A IX-A

Problema 1. Fie $a_1 \in \mathbb{R}$ cu $0 < a_1 < 1$. Definim prin recurenţă şirul de numere reale $a_{n+1} = 3a_n - 4a_n^3$, pentru orice $n \geq 1$.

a) Arătaţi că pentru orice n avem $|a_n| \leq 1$.

b) Arătaţi că pentru orice $k \geq 2$ putem alege termenul iniţial $a_1 \in (0, 1)$ astfel încât $a_{n+k} = a_n$ pentru orice $n \geq 1$.

Sergiu Moroianu
Bucureşti

Barem de corectare. Avem că:

$$3a - 4a^3 \leq 1 \iff (a+1)(2a-1)^2 \geq 0,$$
$$3a - 4a^3 \geq -1 \iff (a-1)(2a+1)^2 \leq 0.$$

Deducem că, dacă $|a| \leq 1$ atunci $|3a - 4a^3| \leq 1$.
Prin inducţie după n rezultă că $|a_n| \leq 1$ pentru orice n.
Observăm că dacă $a_n = \sin t_n$ atunci $a_{n+1} = \sin(3t_n)$, deci prin inducţie după k se obţine că $a_{n+k} = \sin\left(3^k t_n\right)$.
Pentru $k \geq 2$ fixat, căutăm $t_1 = \arcsin(a_1) \in (0, \pi/2)$ astfel încât $3^k t_n \equiv t_n$ (mod 2π) pentru orice $n \geq 1$. Echivalent, vrem $3^{n-1}(3^k - 1)t_1 \equiv 0$ (mod 2π). Alegem $t_1 = \frac{2\pi}{3^k - 1} \leq \frac{\pi}{4}$ şi $a_1 = \sin(\frac{2\pi}{3^k-1})$.

$\square$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 1, Craiova, 23 martie 2024

Problema 2. Fie triunghiul echilateral ABC şi $M, N \in (BC)$, $P, Q \in (CA)$ şi $R, S \in (AB)$ astfel încât $MN = PQ = RS$ şi $M \in (BN), P \in (CQ), R \in (AS)$. Arătaţi că există trei puncte necoliniare în interiorul hexagonului $MNPQRS$ care au aceeaşi sumă a distanţelor la laturile acestuia dacă şi numai dacă ARQ, BMS şi CPN sunt triunghiuri congruente.

Vasile Pop
Cluj-Napoca

Barem de corectare. Arătăm mai întâi că există trei puncte necoliniare în interiorul hexagonului $MNPQRS$ care au aceeaşi sumă a distanţelor la laturile acestuia dacă şi numai dacă triunghiul determinat de prelungirile segmentelor NP, QR şi SM este echilateral.

Suma distaţelor de la orice punct X interior hexagonului $MNPQRS$ la laturile acestuia este suma p_X a distanţelor de la X la laturile triunghiului ABC plus suma s_X a distanţelor de la X la NP, QR respectiv SM. Cum p_X este constantă (se deduce din indentitatea $[ABC] = [XAB] + [XBC] + [XCA]$, unde $[ABC]$ reprezintă aria triunghiului ABC etc.), atunci există trei puncte necoliniare X, Y şi Z în interiorul hexagonului $MNPQRS$ care au aceeaşi sumă a distanţelor la laturile acestuia dacă şi numai dacă $s_X = s_Y = s_Z$.

Considerăm versorii $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ perpendiculari pe laturile NP, QR, respectiv SM. Atunci, din calcul avem

$$\begin{aligned} d(X, NP) &= XN \cdot \sin(\measuredangle XNP) = XN \cdot \cos(\pi/2 - \measuredangle XNP) \\ &= \vec{v_1} \cdot \overrightarrow{XN} = \vec{v_1}(\overrightarrow{XO} + \overrightarrow{ON}), \end{aligned}$$

unde O este un punct fixat. Deducem că $s_X = d(X, NP) + d(X, QR) + d(X, SM) = \overrightarrow{XO} \sum \vec{v_i} + \sum \vec{v_1} \cdot \overrightarrow{ON}$, iar $s_X = s_Y = s_Z$ este echivalent cu

$$\overrightarrow{XO} \sum \vec{v_i} = \overrightarrow{YO} \sum \vec{v_i} = \overrightarrow{ZO} \sum \vec{v_i} \tag{1}$$

Dacă $v = \sum \vec{v_i}$ nu este nul, deducem că (1) este echivalentă cu $XY \perp v$ şi $XZ \perp v$, adică X, Y, Z coliniare, ceea contrazice ipoteza. Aşadar, există cele trei puncte cu proprietatea de mai sus dacă şi numai dacă $v = 0$ (2). Cum $|\vec{v_i}| = 1$, pentru orice $i = 1, 2, 3$, aceşti trei vectori sunt pe direcţii care fac $120°$ două câte două. Deducem că (2) este echivalent cu faptul că triunghiul determinat de prelungirile segmentelor NP, QR şi SM este echilateral.

Arătăm acum că triunghiul determinat de prelungirile segmentelor NP, QR şi SM este echilateral dacă şi numai dacă ARQ, BMS şi CPN sunt triunghiuri congruente.

Cum $\sum \overrightarrow{MN} = 0$ şi $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} = 0$, avem că $\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{SM} = 0$. Deducem atunci că vectorii din ultima sumă determină un triunghi echilateral, adică $NP = QR = SM$. Se obţine imediat că cele 3 triunghiuri sunt congruente (U.L.U.).

Pentru cealaltă implicaţie, fie $MS \cap NP = \{U\}$, $NP \cap RQ = \{V\}$, $RQ \cap MS = \{W\}$. Atunci, $\measuredangle UMN = \measuredangle BMS = \measuredangle NPC$ şi $\measuredangle MNU = \measuredangle PNC$, deci

$$m(\measuredangle NMU) + m(\measuredangle MNU) = m(\measuredangle NPC) + m(\measuredangle PNC) = 120°,$$

adică $m(\measuredangle WUV) = 60°$. Analog se arată că şi celelalte unghiuri au $60°$, deci triunghiul UVW este echilateral.

Observaţie: Existenţa celor 3 puncte necoliniare din interiorul lui $MNPQRS$ cu suma distanţelor la laturile sale constantă implică, aşa cum arătă problema curentă, că ARQ, BMS şi CPN sunt triunghiuri congruente. Atunci dreptele NP, QR, SM determină un triunghi echilateral, deci pentru orice $X \in Int(MNPQRS)$, suma s_X este constantă. Aşadar, este suficient ca 3 puncte necoliniare să aibă suma distanţelor la laturile sale constantă ca toate punctele interioare hexagonului $MNPQRS$ să aibă această proprietate. $\square$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 1, Craiova, 23 martie 2024

Problema 3. Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că, pentru orice $x \in (-1, 1)$, avem

$$(x^2 + ax + b) \cdot \lfloor x^2 + cx + d \rfloor = \lfloor x^2 + ax + b \rfloor \cdot (x^2 + cx + d),$$

unde $\lfloor x \rfloor$ reprezintă partea întreagă a numărului real x. Arătaţi că $a = c$ şi $b = d$.

Cristi Săvescu
Cluj-Napoca

Barem de corectare. Fie funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite prin $f(x) = x^2 + ax + b$ şi $g(x) = x^2 + cx + d$.

Caz 1. $\lfloor f(x) \rfloor = 0$ pentru orice $x \in (-1, 1)$.
Arătăm mai întâi şi că $\lfloor g(x) \rfloor = 0$ pentru orice $x \in (-1, 1)$. Altfel, există un interval $(s, t) \subseteq (-1, 1)$ astfel încât $\lfloor g(x) \rfloor = n \neq 0$ pentru orice $x \in (s, t)$ (se poate deduce acest lucru folosind graficul funcţiei de gradul doi sau studiind intervalele de monotonie ale acesteia). Atunci $n \cdot f(x) = 0$, deci $f(x) = 0$ pentru orice $x \in (s, t)$, ceea ce conduce la o contradicţie.
În cazul în care $\lfloor f(x) \rfloor = \lfloor g(x) \rfloor = 0$ pentru orice $x \in (-1, 1)$, egalitatea din enunţ devine trivială. În acest caz vom demonstra că $f(x) = g(x) = x^2$.
Avem că $f : (-1, 1) \to [0, 1)$. Deducem că $|f(x) - f(y)| < 1$ pentru orice $x, y \in (-1, 1)$. Avem că $|f(x) - f(y)| = |x - y| \cdot |x + y + a|$. Fie $y \in (-1, 0)$, atunci $x = y + 1 \in (0, 1)$. Obţinem $|2y + a + 1| < 1$ pentru orice $y \in (-1, 0)$. În particular $|a| < 1$. (putem pune $y = -\frac{1}{2}$).
Dacă $a > 0$, alegem $y \in (-\frac{a}{2}, 0) \subseteq (-1, 0)$, care conduce la contradicţie.
Dacă $a < 0$, alegem $y \in (-1, -\frac{2+a}{2}) \subseteq (-1, 0)$, conducând din nou la o contradicţie. Astfel obţinem că $a = 0$.

Avem că $0 \leq x^2 + b < 1$ $\forall x \in (-1, 1)$. Pentru $x = 0$ obţinem că $0 \leq b < 1$. Dacă $b > 0$, alegem $x \in (\sqrt{1 - b}, 1) \subseteq (0, 1)$, de unde deducem o contradicţie şi astfel putem afirma că $b = 0$. Am obţinut că $f(x) = x^2$. Analog se arată că $g(x) = x^2$.

Caz 2. Există $x_0 \in (-1, 1)$ astfel încat $\lfloor f(x_0) \rfloor = n \neq 0$.
Atunci există un interval $(s, t) \subseteq (-1, 1)$ astfel încât $\lfloor f(x) \rfloor = n$ pentru orice $x \in (s, t)$. Cu siguranţă, $\lfloor g(x) \rfloor$ nu este identic 0 pe intervalul (s, t), altfel din relaţia din enunţ am obţine că $n \cdot g(x) = 0$, adică $g(x) = 0$ $\forall x \in (s, t)$, ceea ce ar duce la o contradicţie. Aşadar, putem găsi un subinterval $(u, v) \subseteq (s, t)$ astfel încât $\lfloor g(x) \rfloor = m \neq 0$ pentru orice $x \in (u, v)$.

Relaţia din enunţ devine:
$$m \cdot f(x) = n \cdot g(x)$$

pentru orice $x \in (u, v)$. De unde deducem că $m = n \neq 0$, $m \cdot a = n \cdot c$ şi $m \cdot b = n \cdot d$, astfel că $a = c$ şi $b = d$.

$\square$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 1, Craiova, 23 martie 2024

Problema 4. O factorizare a unui număr natural constă în scrierea acestuia ca produs de numere naturale strict mai mari ca 1. Două factorizări sunt considerate esenţial egale dacă diferă doar prin ordinea factorilor. De exemplu, 18 are exact 4 factorizări esenţial diferite: 18, $2 \cdot 9$, $3 \cdot 6$ şi $2 \cdot 3 \cdot 3$. Pentru un număr natural nenul n notăm cu $f(n)$ numărul de factorizări esenţial diferite ale lui n. În exemplul de mai sus $f(18) = 4$. Prin convenţie, punem $f(1) = 1$. Să se arate că:

$$f(n) \leq n,$$

pentru orice număr natural nenul n.

* * *

Barem de corectare. Avem nevoie de următoarea lemă:
Pentru orice număr natural $n \geq 2$

$$\sum_{d|n} \frac{1}{d} < q,$$

unde q *este cel mai mare număr prim care îl divide pe* n.

Într-adevăr, dacă $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ este descompunerea în factori primi a lui n cu $p_1 < \ldots < p_k$, atunci avem:

$$\sum_{d|m} \frac{1}{d} = \prod_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{\alpha_i} \frac{1}{p_i^j} = \prod_{i=1}^{k} \frac{1 - \frac{1}{p_i^{\alpha_i+1}}}{1 - \frac{1}{p_i}} < \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i}} = \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i}{p_i - 1}.$$

Cum $p_i \geq p_{i-1} + 1$ pentru toţi $i \in \overline{1,k}$ (punem $p_0 = 1$), obţinem că:

$$\sum_{d|m} \frac{1}{d} < \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i}{p_i - 1} \leq \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i}{p_{i-1}} = p_k,$$

ceea ce încheie demonstraţia lemei.

Trecem acum să demonstrăm problema prin inducţie după n. Pentru $n = 2$ se verifică imediat că $f(2) = 1 \leq 2$. Presupunem că afirmaţia din enunţ este adevărată pentru toate numerele naturale mai mici sau egale cu $n - 1$ şi o demonstrăm pentru n. Fie $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ descompunerea în factori primi a lui n, astfel încât $p_1 < \ldots < p_k$.

Distingem două cazuri:

Cazul I: $\alpha_k = 1$

Dacă $k = 1$, atunci n este un număr prim si $f(n) = 1 \leq n$.

Dacă $k \geq 2$, atunci orice factorizare a lui n are exact un factor divizibil cu p_k, deci dacă notăm cu $n^* := \frac{n}{p_k}$ atunci avem că:

$$f(n) = \sum_{d|n^*} f(\frac{n^*}{d}) \leq \sum_{d|n^*} \frac{n^*}{d} = n^* \sum_{d|n^*} \frac{1}{d} \leq n^* \cdot p_{k-1} < n,$$

unde în penultima inegalitate am aplicat lema de mai sus.

Cazul II: $\alpha_k > 1$

În acest caz, fie $n^* := \frac{n}{p_k} \cdot q$, unde q este orice număr prim cu $q > p_k$. Atunci, orice factorizare $n = d_1 \cdot ... \cdot d_s$, cu d_1 cel mai mare factor divizibil cu p_k, dă naştere următoarei factorizări a lui n^*:

$$n^* = (\frac{d_1}{p_k} q) \cdot d_2 \cdot ...d_s.$$

Este clar că factorizări esenţial diferite ale lui n dau naştere la factorizări esenţial diferite ale lui n^*, astfel că $f(n) \leq f(n^*)$. Ca în cazul precedent, notăm cu $m := \frac{n^*}{q} = \frac{n}{p_k} < n$ şi avem:

$$f(n) \leq f(n^*) = \sum_{d|m} f(\frac{m}{d}) \leq m \sum_{d|m} \frac{1}{d} \leq m \cdot p_k = n,$$

unde în ultima inegalitate am aplicat încă o dată lema de mai sus. Aceasta încheie inducţia şi demonstraţia problemei.

$\square$