CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 1, Craiova, 23 martie 2024

CLASA A XII-A

Problema 1. Fie a, b numere raţionale, $a > 1$, $b > 1$ şi $\mathcal{F}_{a,b}$ mulţimea funcţiilor $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ care verifică ecuaţia funcţională:

$$f(ax) = bf(x), \quad \forall\, x \geq 0. \tag{1}$$

a) Să se arate că în mulţimea $\mathcal{F}_{a,b}$ există funcţii integrabile pe orice interval, cât şi funcţii neintegrabile pe orice interval.
b) Dacă $f \in \mathcal{F}_{a,b}$ este integrabilă pe $[0, \infty)$ şi $\int_{\frac{1}{a}}^{a} f(x)dx = 1$, să se determine:

$$A = \int_{a}^{a^2} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{şi} \quad B = \int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Vasile Pop
Cluj-Napoca

Barem de corectare. a) Funcţia de tip Dirichlet $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{dacă} \quad x \in \mathbb{Q} \\ b^k, & \text{dacă} \quad x \in [a^k, a^{k+1}) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

verifică ecuaţia (1) şi este neintegrabilă pe orice interval $[c, d] \subseteq [0, \infty)$ (sumele Riemann corespunzătoare punctelor intermediare $\xi_i \in \mathbb{Q}$ dau valoarea 0, iar cele în care $\xi_i \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ dau constante nenule, pentru diviziuni cu norma suficient de mică, depinzând doar de intervalul $[c, d]$).

Există şi funcţii continue cu proprietatea (1), de exemplu

$$f(x) = x^\alpha,\ x \geq 0 : \ (ax)^\alpha = bx^\alpha \Leftrightarrow a^\alpha = b \Leftrightarrow \alpha = \log_a b,$$

deci funcţia $f(x) = x^{\log_a b} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ este integrabilă.

b) Avem

$$1 = \int_{\frac{1}{a}}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{a}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = I + J$$

În I facem schimbarea de variabilă $x = \dfrac{t}{a}$ şi obţinem:

$$I = \int_{1}^{a} f\left(\frac{t}{a}\right) \cdot \frac{1}{a}\,\mathrm{d}t \overset{(1)}{=} \frac{1}{a}\int_{1}^{a} \frac{1}{b} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{ab} \cdot J,$$

astfel că $\quad 1 = \left(\dfrac{1}{ab} + 1\right) \cdot J, \quad$ deci $\quad J = \dfrac{ab}{1 + ab}$

Avem:

$$A = \int_a^{a^2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^a f(at)\cdot a\,\mathrm{d}t \overset{(1)}{=} ab\cdot J = \frac{(ab)^2}{1+ab}$$

$$B = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty}\int_{a^{-1-k}}^{a^{-k}} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f(a^{-1-k}t)}{a^{k+1}}\,\mathrm{d}t \overset{(1)}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(ab)^{k+1}}\cdot J$$

$$\frac{1}{1+ab}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(ab)^k} = \frac{ab}{(ab)^2-1}.$$

□

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 1, Craiova, 23 martie 2024

Problema 2. a) Fie k un număr natural nenul şi G un grup cu mai puţin de $4k^2$ elemente. Dacă $Z(G)$ conţine cel puţin $\varphi(k)+1$ elemente de ordin k, arătaţi că G e abelian.
b) Găsiţi un grup necomutativ G cu $|G| = 16$ astfel încât $Z(G)$ conţine doua elemente de ordin 2.

Robert Rogozsan
Bucureşti

Barem de corectare. a) Fie $x \in Z(G)$ cu $o(x) = k$. Se cunoaşte faptul că $o\left(x^t\right) = \dfrac{o(x)}{(o(x), t)}$, $\forall t \in \mathbb{N}^*$.

Aşadar, pentru $t = \overline{1, k}$, $o\left(x^t\right) = \dfrac{k}{(k,t)}$, deci $o(x^t) = k \iff (k,t) = 1$. Atunci în $\langle x \rangle$ există exact $\varphi(k)$ elemente de ordin k. Din ipoteză avem deci că există $y \in Z(G) \setminus \langle x \rangle$ cu $o(y) = k$.

Fie P subgrupul generat de x, y în $Z(G)$. Cum $Z(G)$ este abelian se observă uşor că $P = \{x^a y^b \mid a, b \in \overline{0, k-1}\}$. Analizăm acum cardinalul acestei mulţimi. Fie $a, b, c, d \in \overline{0, k-1}$ cu $x^a y^b = x^c y^d$. Atunci $x^{a-c} = y^{d-b}$ şi cum $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \{e\}$ obţinem $x^{a-c} = y^{d-b} = e$. Deci $k | (a-c)$ şi $k | (d-b)$, iar cum $-(k-1) \leq a-c; d-b \leq k-1$ obţinem $a = c$ şi $b = d$. Aşadar mulţimea P are exact $k \cdot k = k^2$ elemente.

Cum $P \leq Z(G)$ obţinem din Teorema lui Lagrange că $k^2 | \#Z(G)$. Cum $\#Z(G) \leq \#G < 4k^2$ deducem că $Z(G) = ak^2$ unde $a \in \{1, 2, 3\}$. Aşadar $G/Z(G)$ are cel mult 3 elemente, deci este un grup ciclic. De aici rezultă imediat că G este abelian.

b) Considerăm grupul $G_1 = D_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sau grupul $G_2 = Q_8 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ unde D_4 este grupul diedral de ordin 4(grupul de simetrie al pătratului) şi Q_8 este grupul cuaternionilor. Elementul adăugat din $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ este un element care comută cu toate elementele din D_4 sau Q_8. Se ştie că centrul fiecărui din aceste două grupuri, D_4 sau Q_8, este $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Deci în ambele cazuri $Z(G_i) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

□

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 1, Craiova, 23 martie 2024

Problema 3. Determinaţi toate inelele comutative R cu $|R| \geq 4$, care nu sunt corpuri, astfel încât oricare ar fi $a, b, c \in R$ nenule şi distincte

$$ab + bc + ca$$

este un element inversabil al inelului R.

Vlad Matei
Bucureşti

Barem de corectare. Fie $x \neq 0$ un element neinversabil al inelului R. Dacă $2x \neq 0$ putem considera elementele $x, -x, 1$ care sunt toate distincte şi de aici ar rezulta că $-x^2$ este inversabil,aşadar x este inversabil contradicţie. Obţinem $2x = 0$ pentru fiecare element neinversabil x.

Deducem că 2 nu este inversabil altfel $x = 0$, contradicţie cu $x \neq 0$. Deci $4 = 0$ dacă punem $x = 2$.

Dacă $2 \neq 0$ atunci pentru $b \neq 2, -1, 0$ arbitrar în inel cum elementele $b, -1, 2$ sunt distincte nenule; altfel $-1 = 2$ deci $3 = 0$. Cum $4 = 0$ deducem că $1 = 0$ contradicţie. Deci avem că $b - 2$ este inversabil; dacă notăm $x = b - 2$ avem că x este inversabil dacă $x \neq 0, 1, 2$. Aşadar 2 este singurul element nenul neinversabil.

Dacă $|R| = 4$ atunci inelul R este $\{0, \pm 1, 2\}$ unde $4 = 0$ care verifică; R este izomorf cu $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Pentru $|R| \geq 5$ găsim $x \neq \pm 1$ inversabil. $2x$ nu poate fi inversabil deoarece ar rezulta că 2 este inversabil. Cum 2 este unicul element neinversabil trebuie să avem $2x = 2$ deci $2(1 - x) = 0$. Avem $1 - x \neq 0, \pm 1, 2$ deci $1 - x$ este de asemenea inversabil; 2 fiind unicul element neinversabil. Aşadar $2 = 0$.

Am presupus că R nu este corp. Revenind la alegerea unui element neinversabil $x \neq 0$ să considerăm elementele $x, x + 1, 1$ care sunt toate distincte deci $x^2 + x + 1$ este inversabil. Dacă $x \neq x^2$ atunci $x, x^2, 1$ sunt distincte. Deci $x^3 + x^2 + x = x(x^2 + x + 1)$ este inversabil şi asta ar implica că x este inversabil, o contradicţie. Obţinem că $x^2 = x$.

Să observăm că pentru orice $r \neq 0, 1, x, x+1$ din inel cum elementele $r, x, x+1$ sunt distincte avem că $rx + r(x+1) + x(x+1) = 2rx + x^2 + x + r = r$ este inversabil, folosind $x^2 = x$ şi faptul că inelul are caracteristica 2. Deci x şi $x + 1$ sunt singurele elemente neinversabile.

Dacă R are cel puţin 5 elemente există $r \neq 1$ în inel inversabil. Să observăm că rx nu este inversabil deci trebuie ca $rx = x$ sau $rx = x + 1$. Ultima imediat implică că x ar fi inversabil o contradicţie. Prima egalitate o putem rescrie $(r - 1)x = 0$ deci $r - 1$ nu este inversabil, de unde deducem $r - 1 = x, x + 1$ sau $r = x, x + 1$ o contradicţie cu alegerea lui r.

Conchidem că singurul astfel de inel este $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

$\square$

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 1, Craiova, 23 martie 2024

Problema 4. Fie $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ o funcţie continuă şi periodică de perioadă 1. Să se arate că pentru orice $a \in \mathbb{R}$ avem:

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x+a)} dx \geq 1$$

***

Barem de corectare. Să arăm mai întâi că inegalitatea are loc pentru $a \in \mathbb{Q}$. Fie $a = \frac{p}{q}$. Rescriem integrala ca

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x+a)} = \sum_{k=0}^{q-1} \int_{k/q}^{(k+1)/q} \frac{f(x)}{f(x+p/q)} dx \geq 1$$

Pentru fiecare interval facem schimbarea de variabilă $x = x+k/q$. Fie $g_k(x) = \dfrac{f(x+k/q)}{f(x+(p+k)/q)}$. Atunci avem

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x+a)} = \int_0^{1/q} \sum_{k=0}^{q-1} g_k(x)\, dx.$$

Folosind periodicitatea lui f avem că $g_0(x)g_1(x)\ldots g_{q-1}(x) = 1$ deoarecele numerele $p+k$ modulo q reprezintă o permutarea a numerelor $0, 1, \ldots, q-1$ modulo q. Din inegalitatea mediilor $\sum\limits_{k=0}^{q-1} g_k(x) \geq q\sqrt[q]{g_0(x)g_1(x)\ldots g_{q-1}(x)} = q$. Deci

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x+a)} \geq \int_0^{1/q} q\, dx = 1$$

Pentru a irational să luăm un şir de numerele raţionale $a_n \to a$.

Folosind Weierstrass pe intervalul $[0, 1]$ avem că există $c \in [0, 1]$ cu $m = f(c) = \inf\limits_{x\in[0,1]} f(x) > 0$ şi $M = f(d) = \sup\limits_{x\in[0,1]} f(x) > 0$; din periodicitate avem $m < f(x) < M$.

Cum f este uniform continuă pe $[0, 1]$ fiind compact avem că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât dacă $|x_1 - x_2| < \delta$ atunci $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

În cazul nostru cum $a_n \to a$ avem

$$\left| \frac{f(x)}{f(x+a)} - \frac{f(x)}{f(x+a_n)} \right| = \frac{f(x)|f(x+a_n) - f(x+a)|}{f(x+a)f(x+a_n)} < \frac{M\varepsilon}{m^2}$$

deci

$$\left| \int_0^1 \frac{f(x)}{f(x+a)}\, dx - \int_0^1 \frac{f(x)}{f(x+a_n)}\, dx \right| < \frac{M\varepsilon}{m^2}$$

pentru $n \geq N_\varepsilon$.

Aşadar

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x+a)} = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{f(x)}{f(x+a_n)}\, dx \geq 1.$$

$\square$