CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 1, Craiova, 23 martie 2024

CLASA A VII-A

Problema 1. Fie m, n, p trei numere naturale nenule şi considerăm numerele $m' = (m, np)$, $n' = (n, mp)$ şi $p' = (p, mn)$, unde (a, b) este cel mai mare divizor comun al numerelor a şi b. Să se arate că ecuaţia $x^m + y^n = z^p$ are soluţii în mulţimea numerelor naturale nenule dacă şi numai dacă ecuaţia $x^{m'} + y^{n'} = z^{p'}$ are soluţii în mulţimea numerelor naturale nenule.

Problema 2. Să se arate că numărul:

$$\left\lfloor \frac{2024}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2023}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2022}{3} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{1013}{1012} \right\rfloor,$$

este par, unde $\lfloor x \rfloor$ reprezintă partea întreagă a numărului x.

Problema 3. Fie M un punct pe segmentul BC al triunghiului ABC. Cercul circumscris triunghiului ABM intersectează segmentul AC într-un punct N diferit de A. Se construieşte cercul ce trece prin punctele A, N şi este tangent la dreapta BC în P. Să se arate că $\measuredangle BAP \equiv \measuredangle PNM$.

Problema 4. Pentru mulţimea M formată din $n \geqslant 3$ puncte din plan numim *drum* o linie frântă $A_1A_2 \ldots A_n$, cu proprietatea că $M = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ şi definim lungimea lui ca fiind suma $A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n$. Spunem despre mulţimea M că este drum-unicată dacă orice două drumuri distincte au lungimi distincte şi că este segment-unicată dacă orice două segmente nedegenerate distincte cu capetele în puncte din M au lungimi distincte. Determinaţi numerele naturale $n \geqslant 3$ în fiecare dintre cazurile:
a) orice mulţime M de n puncte din plan segment-unicată este drum-unicată.
b) orice mulţime M de n puncte din plan drum-unicată este segment-unicată.

(liniile frânte nu sunt orientate, astfel că $A_1A_2 \ldots A_n$ este aceeaşi cu $A_nA_{n-1} \ldots A_1$)

Timpul de lucru este de 4 ore. Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 1, Craiova, 23 martie 2024

CLASA A VIII-A

Problema 1. Fie $E(x,y)=\dfrac{(1+x)(1+y)(1+xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}$. Determinaţi:

a) cea mai mare valoare pe care o poate lua $E(x,y)$ când $x,y\in\mathbb{R}$;

b) cea mai mică valoare pe care o poate lua $E(x,y)$ când $x,y\in\mathbb{R}$.

Problema 2. Fie $ABCD$ un tetraedru pentru care $BA\perp AC$, $DB\perp(BAC)$ şi $AC\neq BD$. Notăm cu O mijlocul segmentului AB şi K piciorul perpendicularei din O pe DC. Demonstraţi că

$$\frac{V_{KOAC}}{V_{KOBD}}=\frac{AC}{BD}$$

dacă şi numai dacă

$$2AC\cdot BD=AB^2.$$

Problema 3. Se ştie că există $k\in\mathbb{N}^*$ astfel încât numărul $\overline{3\underbrace{a...a}_{k\text{ de }a}20943}$ este prim.

Aflaţi cifra a.

Problema 4. Spunem că un număr natural n este „joli" dacă este medie aritmetică a două sau mai multor puteri (nu neapărat distincte) ale numărului 2 şi "superjoli" dacă este medie aritmetică a două sau mai multor puteri distincte ale numărului 2.

De exemplu numerele 7 şi 92 sunt superjoli, pentru că $7=\dfrac{2^4+2^2+1}{3}$, $92=\dfrac{2^8+2^4+2^2}{3}$.

a) Demonstraţi că orice număr natural nenul este joli.

b) Demonstraţi că nicio putere a lui 2 nu este superjoli.

c) Aflaţi cel mai mic număr natural nenul, diferit de o putere a lui 2, care nu este superjoli.

Timpul de lucru este de 4 ore. Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 1, Craiova, 23 martie 2024

CLASA A IX-A

Problema 1. Fie $a_1 \in \mathbb{R}$ cu $0 < a_1 < 1$. Definim prin recurenţă şirul de numere reale $a_{n+1} = 3a_n - 4a_n^3$, pentru orice $n \geq 1$.

a) Arătaţi că pentru orice n avem $|a_n| \leq 1$.

b) Arătaţi că pentru orice $k \geq 2$ putem alege termenul iniţial $a_1 \in (0, 1)$ astfel încât $a_{n+k} = a_n$ pentru orice $n \geq 1$.

Problema 2. Fie triunghiul echilateral ABC şi $M, N \in (BC)$, $P, Q \in (CA)$ şi $R, S \in (AB)$ astfel încât $MN = PQ = RS$ şi $M \in (BN), P \in (CQ), R \in (AS)$. Arătaţi că există trei puncte necoliniare în interiorul hexagonului $MNPQRS$ care au aceeaşi sumă a distanţelor la laturile acestuia dacă şi numai dacă ARQ, BMS şi CPN sunt triunghiuri congruente.

Problema 3. Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că, pentru orice $x \in (-1, 1)$, avem

$$(x^2 + ax + b) \cdot \lfloor x^2 + cx + d \rfloor = \lfloor x^2 + ax + b \rfloor \cdot (x^2 + cx + d),$$

unde $\lfloor x \rfloor$ reprezintă partea întreagă a numărului real x. Arătaţi că $a = c$ şi $b = d$.

Problema 4. O factorizare a unui număr natural constă în scrierea acestuia ca produs de numere naturale strict mai mari ca 1. Două factorizări sunt considerate esenţial egale dacă diferă doar prin ordinea factorilor. De exemplu, 18 are exact 4 factorizări esenţial diferite: 18, $2 \cdot 9$, $3 \cdot 6$ şi $2 \cdot 3 \cdot 3$. Pentru un număr natural nenul n notăm cu $f(n)$ numărul de factorizări esenţial diferite ale lui n. În exemplul de mai sus $f(18) = 4$. Prin convenţie, punem $f(1) = 1$. Să se arate că:

$$f(n) \leq n,$$

pentru orice număr natural nenul n.

Timpul de lucru este de 4 ore. Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ŢIŢEICA

Ediţia 1, Craiova, 23 martie 2024

CLASA A X-A

Problema 1. Fie $n \geqslant 3$ şi $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. Pentru orice $f : A \to A$, definim mulţimea

$$A_f = \{|f(1) - f(2)|, |f(2) - f(3)|, \ldots, |f(n-1) - f(n)|, |f(n) - f(1)|\}.$$

Determinaţi cea mai mică, respectiv cea mai mare valoare pe care o poate lua cardinalul mulţimii A_f, când f parcurge familia funcţiilor bijective definite pe A cu valori în A.

Problema 2. Fie numerele reale $a, b, c > 1$. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia

$$\log_{a+b}(a^x + b) = \log_b((b+c)^x - c).$$

Problema 3. Fie $n \geqslant 2$ un număr natural par. Determinaţi cel mai mare număr natural natural $m \geqslant 2^{n-2} + 1$ cu proprietatea că există m submulţimi distincte ale mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$, oricare $2^{n-2} + 1$ dintre ele având intersecţia vidă.

Problema 4. Determinaţi numerele naturale $n \geqslant 3$ pentru care există o mulţime M de n numere complexe nenule şi un număr natural nenul m astfel încât $(1 + z_1 z_2 z_3)^m = 1$, pentru orice numere distincte două câte două $z_1, z_2, z_3 \in M$.

Timpul de lucru este de 4 ore. Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 1, Craiova, 23 martie 2024

CLASA A XI-A

Problema 1. Găsiţi toate funcţiile continue f şi g pentru care oricum am alege două şiruri $(a_n)_{n\geq 1}$ şi $(b_n)_{n\geq 1}$ cu proprietatea că $(a_n + b_n)_{n\geq 1}$ este convergent, atunci şirul $(f(a_n) + g(b_n))_{n\geq 1}$ este convergent.

Problema 2. Găsiţi toate funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotone şi derivabile de două ori pentru care

$$f'' + 4f + 3f^2 + 8f^3 = 0.$$

Problema 3. Fie A şi B două matrici $n \times n$ cu elemente numere întregi, iar p un număr prim. Să se arate că:

$$\mathrm{Tr}(A + B)^p \equiv \mathrm{Tr}(A^p + B^p) \pmod p,$$

unde $\mathrm{Tr}X$ este urma matricei X.

Problema 4. Fie $n \geqslant 2$. Determinaţi matricele $A \in M_n(\mathbb{C})$ cu proprietatea că

$$\mathrm{rang}(A^2) + \mathrm{rang}(B^2) \geqslant 2 \cdot \mathrm{rang}(AB),$$

pentru orice $B \in M_n(\mathbb{C})$.

Timpul de lucru este de 4 ore. Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 1, Craiova, 23 martie 2024

CLASA A XII-A

Problema 1. Fie a, b numere raţionale, $a > 1$, $b > 1$ şi $\mathcal{F}_{a,b}$ mulţimea funcţiilor $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ care verifică ecuaţia funcţională:

$$f(ax) = bf(x), \quad \forall\, x \geq 0.$$

a) Să se arate că în mulţimea $\mathcal{F}_{a,b}$ există funcţii integrabile pe orice interval, cât şi funcţii neintegrabile pe orice interval.
b) Dacă $f \in \mathcal{F}_{a,b}$ este integrabilă pe $[0, \infty)$ şi $\int_{\frac{1}{a}}^{a} f(x)dx = 1$, să se determine:

$$A = \int_a^{a^2} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{şi} \quad B = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Problema 2. a) Fie k un număr natural nenul şi G un grup cu mai puţin de $4k^2$ elemente. Dacă $Z(G)$ conţine cel puţin $\varphi(k) + 1$ elemente de ordin k, arătaţi că G e abelian (φ este funcţia indicator a lui Euler).
b) Găsiţi un grup necomutativ G cu $|G| = 16$ astfel încât $Z(G)$ conţine două elemente de ordin 2.

Problema 3. Determinaţi toate inelele comutative R cu $|R| \geq 4$, care nu sunt corpuri, astfel încât oricare ar fi $a, b, c \in R$ nenule şi distincte

$$ab + bc + ca$$

este un element inversabil al inelului R.

Problema 4. Fie $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ o funcţie continuă şi periodică de perioadă 1. Să se arate că pentru orice $a \in \mathbb{R}$ avem:

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x+a)} dx \geq 1$$

Timpul de lucru este de 4 ore. Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.