CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 2, Craiova, 22 martie 2025

CLASA A VII-A

Problema 1. Găsiţi toate tripletele de numere naturale (a, b, c), care satisfac simultan condiţiile
- $1 \leq a < b < c \leq 100$,
- b este media geometrică a lui a si c,
- $\{\sqrt{b}\}$ este media aritmetică a lui $\{\sqrt{a}\}$ şi $\{\sqrt{c}\}$.

(Prin $\{x\}$ se notează partea fracţionară a lui x.)

Problema 2. În triunghiul ABC, se consideră dreptele concurente AA_1, BB_1, CC_1, unde punctele A_1, B_1, C_1 se află pe segmentele BC, AC, respectiv AB. Să se arate că dacă punctul comun al celor trei drepte AA_1, BB_1, CC_1 este centrul cercului înscris în $\Delta A_1B_1C_1$, atunci acesta este de asemenea ortocentrul ΔABC.

Problema 3. Dintre toate triunghiurile nedegenerate cu laturi numere naturale și perimetrul 100, determinaţi triunghiul cu aria minimă.

Problema 4. Fie $4n$ puncte în plan, astfel încât oricare trei dintre ele nu sunt coliniare, unde $n \geq 1$. Să se arate că mulţimea centrelor de greutate ale triunghiurilor care se pot forma având vârfurile în aceste puncte conţine cel puţin $4n$ elemente.

Timpul de lucru este de 4 ore. Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.

Ediţia 2, Craiova, 22 martie 2025

CLASA A VIII-A

Problema 1. Determinaţi numerele reale x ştiind că $\frac{n}{3n+1} < x < \frac{4n+1}{2n-1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Problema 2. Fie $k \geq 2$ un număr natural şi $x_1, x_2, \ldots, x_k \in (0,1)$ numere reale. De asemnea, fie $m_1, m_2, \ldots, m_k$, $n_1, n_2, \ldots, n_k$ numere întregi. Definim

$$A = x_1^{m_1} \cdot x_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{m_k},\ B = x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{n_k}$$

şi

$$\begin{aligned} C &= x_1^{\min(m_1,n_1)} \cdot x_2^{\min(m_2,n_2)} \cdot \ldots \cdot x_k^{\min(m_k,n_k)} \\ D &= x_1^{\max(m_1,n_1)} \cdot x_2^{\max(m_2,n_2)} \cdot \ldots \cdot x_k^{\max(m_k,n_k)}. \end{aligned}$$

Să se demonstreze că

$$A + B \leq C + D.$$

Când are loc egalitatea?

Problema 3. În spațiu sunt date două pentagoane regulate $ABCDE$ și $AEKPL$, astfel încât $\angle DAK = 60°$. Notăm cu M, N şi S mijloacele segmentelor AE, CD şi respectiv EK.

a) Să se arate că triunghiul NMS este dreptunghic.

b) Să se demonstreze că planele (ACK) și (BAL) sunt perpendiculare.

Problema 4. a) Să se arate că oricare ar fi numerele naturale nenule a, b, c există un număr natural nenul N astfel încât

$$\left(N + a^2\right)\left(N + b^2\right)\left(N + c^2\right)$$

este pătrat perfect.

b) Arătaţi că există cinci numere naturale nenule distincte a, b, c, d, e pentru care există un număr natural nenul N astfel încât

$$\left(N + a^2\right)\left(N + b^2\right)\left(N + c^2\right)\left(N + d^2\right)\left(N + e^2\right)$$

să fie pătrat perfect.

Timpul de lucru este de 4 ore. Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 2, Craiova, 22 martie 2025

CLASA A IX-A

Problema 1. Fie $2n+1$ puncte distincte situate pe un cerc. Considerăm toate distanţele dintre oricare două dintre aceste puncte. Care este cardinalitatea minimă pe care o poate avea mulţimea tuturor acestor distanţe?

Problema 2. Fie a, b, c trei numere reale strict pozitive astfel încât $ab+bc+ca=4$. Determinaţi valoarea minimă a expresiei:

$$E(a,b,c)=\frac{a^2+b^2}{ab}+\frac{b^2+c^2}{bc}+\frac{c^2+a^2}{ca}-(a-b)^2.$$

Problema 3. Considerăm în plan vectorii nenuli $\overrightarrow{OA_1}, ..., \overrightarrow{OA_n}$, unde $n \geq 3$, astfel încât oricare doi dintre ei sunt necoliniari. Presupunem că inegalitatea

$$|\overrightarrow{OA_1}+...+\overrightarrow{OA_n}| \geq |\pm\overrightarrow{OA_1}\pm...\pm\overrightarrow{OA_n}|$$

are loc pentru orice alegere a semnelor $\pm$. Arătaţi că există o dreaptă care trece prin O, faţă de care punctele $A_1, ..., A_n$ se află de aceeaşi parte.

Problema 4. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, notăm cu $s(n)$ suma cifrelor lui n. Să se determine numerele naturale $k \geq 2$ pentru care există $a, b \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$s(n^3+an+b) \equiv s(n) \pmod{k},$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^\star$.

Timpul de lucru este de 4 ore. Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 2, Craiova, 22 martie 2025

CLASA A X-A

Problema 1. Determinaţi numerele $a, b, c \in \mathbb{C}^*$ pentru care

$$|a\bar{b} + b\bar{c} + c\bar{a}| = |a|^2 + |b|^2 + |c|^2.$$

Problema 2. Fie $n \geqslant 2$ şi funcţiile $f, g : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ astfel încât

$$g(k) = \text{card}\{i \in \{1, 2, \ldots, n\} | f(i) \leqslant f(k)\},$$

pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

a) Arătaţi că f este bijectivă dacă şi numai dacă g este bijectivă.

b) Dacă g este o funcţie dată, determinaţi, în funcţie de g, numărul de funcţii f care verifică proprietatea dată.

Problema 3. Fie $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ o funcţie cu proprietatea că

$$f(x + f(y)) = f(x + y) + f(y), \text{ pentru orice } x, y > 0.$$

a) Arătaţi că $f(x) > x$, pentru orice $x > 0$.

b) Arătaţi că $g : (0, \infty) \to (0, \infty)$ definită prin $g(x) = f(x) - x$, este injectivă.

c) Determinaţi toate funcţiile f cu proprietatea dată.

Problema 4. O cetate aflată în riscul de a fi atacată îşi stabileşte turnuri de apărare, pe care le reprezentăm ca $n \geqslant 3$ puncte în plan, astfel încât oricare trei dintre ele nu sunt coliniare. Orice poligon convex având vârfurile printre aceste puncte este numit bază. În fiecare turn de apărare se află câte un soldat. Pentru fiecare bază, statul plateşte câte $k \cdot 2^k$ monede fiecărui soldat aflat în turnurile de pe frontiera bazei, unde k este numărul de soldaţi aflaţi în interiorul (şi nu pe frontierele) bazei. Arătaţi că statul poate plăti soldaţii dintr-un buget de $n(n+1) \cdot 2^{n-3}$ monede, indiferent de localizarea celor n turnuri de apărare.

Timpul de lucru este de 4 ore. Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 2, Craiova, 22 martie 2025

CLASA A XI-A

Problema 1. Să se determine toate funcţiile continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ care satisfac egalitatea

$$f(x + y) = f(x + f(y)),$$

pentru toţi $x, y \in \mathbb{R}$.

Problema 2. Fie $n \geq 2$ și fie $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât

$$\{\text{rang}(A^k) \mid k \geq 1\} = \{\text{rang}(B^k) \mid k \geq 1\}.$$

Arătaţi că $\text{rang}(A^k) = \text{rang}(B^k)$, pentru orice $k \geq 1$.

Problema 3. Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ șirul de numere reale definit prin $a_0 \geq 0$ și

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 - 1}{n + 1},$$

pentru orice $n \geq 0$. Demonstrați că există un număr real $a > 0$ astfel încât:

- Pentru orice $a_0 \geq a$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$;
- Pentru orice $0 \leq a_0 < a$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Problema 4. Fie $\mathcal{M}$ o submulţime a mulţimii S_n a permutărilor mulţimii $\{1, 2, \ldots$ $\ldots, n\}$, cu $n \geq 2$, care conţine cel puţin două elemente, astfel încât pentru orice $\sigma, \tau \in \mathcal{M}$ avem că $\sigma\tau \in \mathcal{M}$. Se consideră o funcţie $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ care satisface inegalitatea:

$$|f(\sigma\tau) - f(\sigma) - f(\tau)| \leq 1, \forall \sigma, \tau \in \mathcal{M}.$$

Să se demonstreze că:

$$\max_{\sigma,\tau\in\mathcal{M}} |f(\sigma) - f(\tau)| \leq 2 - \frac{2}{|\mathcal{M}|},$$

unde $|\mathcal{M}|$ denotă cardinalul mulţimii $\mathcal{M}$.

Timpul de lucru este de 4 ore. Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ȚIȚEICA

Ediţia 2, Craiova, 22 martie 2025

CLASA A XII-A

Problema 1. Fie G un grup finit şi a un element fixat al lui G. Definim mulţimea

$$S_a = \{g \in G \mid ga \neq ag \text{ şi } ga^2 = a^2 g\}.$$

Să se arate că:

1. Dacă $g \in S_a$, atunci $ag^{-1} \in S_a$.
2. Cardinalul mulţimii S_a este multiplu de 4.

Problema 2. Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Demonstraţi că:

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin(2x)) \sin x \, dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos^2 x) \cos x \, dx.$$

Problema 3. Fie $\mathcal{P}_n$ multimea tuturor polinoamelor monice de grad n cu coeficienţi reali. Demonstraţi că, pentru orice două numere reale $a < b$, avem:

$$\inf_{P \in \mathcal{P}_n} \int_a^b |P(x)| dx > 0.$$

Problema 4. Fie R un inel. Considerăm $x, y \in R$ astfel încât $x^2 = y^2 = 0$. Demonstraţi că dacă $x + y - xy$ este nilpotent, atunci şi xy este nilpotent.

Timpul de lucru este de 4 ore. Fiecare problemă este notată de la 0 la 7 puncte.